1933 № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ • EXEMPLE DE CITATION
Л. Л. Иванов. К минералогии топазовых месторождений Волыни. ИМЕН, 1933, № 3, стр. 421.
L. Ivanov. Sur la minéralogie des gisements de topaze en Volhynie (Ukraine). BAS-MN, 1933, № 3, p. 421.

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Март 1933 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор А. В. Суслов

Начато набором в декабре 1932 г. — Подписано к печати 28 марта 1933 г.

162 (309—470) стр. (18 фиг. + 2 табл.

Формат бум. 72 × 110 см. — $10^5/_8$ печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2700

Ленгорлит № 7192. — АНИ № 95. — Заказ № 270

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ÜBER EINIGE FUNKTIONEN, WELCHE IN ZWEI GEGEBENEN INTERVALLEN AM WENIGSTEN VON NULL ABWEICHEN

Von N. ACHYESER

(*Presenté par* S. Bernstein, *membre de l'Académie*)

II TEIL*

IV Kapitel

Über das asymptotische Verhalten der Grösse m_n

§ **10. Vorbemerkungen.** Der im § 3 eingeführte und durch m_n bezeichnete kleinste Wert, welchen das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms mit dem höchsten Gliede x^n in $\mathcal{E}$

$$<-1, \alpha>, <\beta, 1>$$

haben kann, ist eine gewisse Funktion von α, β und n, deren genaue Bestimmung für jedes endliche n bei beliebigen α und β mit sehr grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Es entsteht daher die Aufgabe, für m_n wenigstens einen asymptotischen (falls $n \to \infty$) Ausdruck zu finden. Um diese den Gegenstand dieses Kapitels bildende Aufgabe zu lösen, werden wir für jedes n drei ganze Funktionen mit dem höchsten Gliede x^n konstruieren, von welchen wenn auch nicht genau, so doch für genügend grosse n mit grosser Annäherung, mindestens, eine als in $\mathcal{E}$ am wenigsten von Null abweichende angesehen werden kann. Ehe wir zur Konstruktion dieser Polynome übergehen, nehmen wir die Grössen $\varkappa$ und ρ, welche vermöge der Gleichungen (1), (2) und der Zusatzbedingung (3) definiert sind, und bestimmen für jedes n die ganze Zahl p und die der Ungleichung

$$-K < \sigma \leqslant 0$$

* Siehe BAS-MN, 1932, № 9, S. 1163.

genügende Grösse σ aus der Beziehung

$$(23) \qquad -n\rho = pK - \sigma.$$

Ist $\frac{\rho}{K}$ eine rationale Zahl, so existiert offenbar eine unendliche Exponentenfolge $n_1, n_2, \ldots$, für welche $\sigma = 0$. Für jedes dieser Folge angehörende n hat das Tschebyscheffsche in bezug auf $\mathcal{E}$ Polynom die Gestalt

$$t_n(x) = T_n(x;\ p, \varkappa),$$

wie es unmittelbar aus dem Satze F (§ 8) folgt. Wir können diesen Fall als trivialen bezeichnen und im folgenden stets $\sigma \neq 0$ voraussetzen.

§ **11. Konstruktion der Polynome** $U_n(x)$. Es sei

$$(24_1) \qquad R_n(x) = \frac{M_n}{2}\left\{\left[\frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)}\right]^n \frac{\theta(u-\sigma)}{\theta(u+\sigma)} + \left[\frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}\right]^n \frac{\theta(u+\sigma)}{\theta(u-\sigma)}\right\},$$

$$(24_2) \qquad M_n = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\theta(\rho+\sigma)}{\theta(\rho-\sigma)}\left[\frac{\theta(0)\,\theta_1(0)}{\theta(\rho)\,\theta_1(\rho)}\right]^{2n},$$

wo $\varkappa$, ρ und σ vermöge (1), (2), (23) definiert sind und der Zusammenhang zwischen x und u die Form (5) hat.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$(25) \qquad R_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n + \frac{Q}{x-\zeta} = U_n(x) + \frac{Q}{x-\zeta},$$

wo

$$(a) \qquad \zeta = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2sn^2(\sigma + iK') + \alpha - 1},$$

so dass wegen $-K < \sigma < 0$:

$$(b) \qquad \alpha < \zeta < \beta,$$

und

$$(c) \qquad Q = \lim_{x \to \zeta} (x-\zeta) R_n(x) = (-1)^p M_n \frac{2(\beta-\zeta)(\zeta-\alpha)}{\beta-\alpha} \frac{\theta^2(\sigma)\cdot\theta_1^2(\sigma)}{\theta^2(0)\cdot\theta_1^2(0)}\left[\frac{\theta(\rho-\sigma)}{\theta(\rho+\sigma)}\right]^n.$$

Wegen (b) besteht für $x \prec \mathcal{E}$ die Ungleichung

$$\left|\frac{(\beta-\zeta)(\zeta-\alpha)}{(\beta-\alpha)(x-\zeta)}\right| < 1;$$

daher folgt aus (a) und (c), dass

(26) $$\varepsilon_n = \frac{\max\limits_{x \lessgtr \mathcal{E}} \left| \frac{Q}{x-\zeta} \right|}{M_n} < 2 \frac{\theta^2(\sigma)\,\theta_1^2(\sigma)}{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)} \left[\frac{\theta(\rho-\sigma)}{\theta(\rho+\sigma)} \right]^n .$$

Da $R_n(x)$ bis auf einen konstanten Faktor einen Speziellfall der Funktion $r(x)$ von § 5 bildet, wobei hier

$$\mathsf{M} = n, \ \mathsf{M}_0 = 0, \ \mathsf{N} = \mathsf{N}_0 = 1,$$

so besteht die Gleichung

(d) $$\max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |R_n(x)| = M_n$$

und die Anzahl der Abweichungsstellen von $R_n(x)$ in $\mathcal{E}$ ist nicht kleiner, als

$$2 + \mathsf{M} - \mathsf{N} = n + 1,$$

wobei

$$R_n(\alpha) = R_n(\beta) \cdot (-1)^{1-0} = -R_n(\beta) = \pm M_n .$$

Nun folgt aber aus (25) und (d), dass

(e) $$M_n(1-\varepsilon_n) < \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |U_n(x)| < M_n(1+\varepsilon_n),$$

und nach dem Satze I (vgl. auch (§ 2) ist

(f) $$M_n(1-\varepsilon_n) < m_n < M_n(1+\varepsilon_n).$$

Ist daher für irgend ein n die Grösse ε_n genügend klein, so zeigen die aus (e) und (f) folgenden Ungleichungen

(27_1) $$\frac{1-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} < \frac{\max\limits_{x \lessgtr \mathcal{E}} |U_n(x)|}{m_n} < \frac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n},$$

(27_2) $$1-\varepsilon_n < \frac{M_n}{m_n} < \frac{1}{1-\varepsilon_n},$$

dass $U_n(x)$ für dieses n mit genügend grosser Annäheruug in $\mathcal{E}$ am wenigsten von Null abweicht und dass M_n genügend genau die kleinste Abweichung darstellt. Nun folgt aber aus (11), dass ε_n gewiss dann gegen Null konvergiert, wenn n eine solche ins Unendliche wachsende Folge durchläuft, für welche beständig

$$-K + \delta < \sigma < -\delta,$$

wo $\delta > 0$ eine beliebig kleine, aber feste, d. h. von n unabhängende, Grösse bezeichnet.

§ **12. Konstruktion der Polynome** $V_n(x)$. Da $\sigma \neq 0$ vorausgesetzt ist, so folgt aus (2), (4) und (23), dass

$$(a) \qquad 1-2sn^2\left(\frac{p}{n}K;\ \varkappa\right) > \alpha, \quad 2sn^2\left(\frac{n-p}{n}K;\ \varkappa\right)-1 > \beta.$$

Für genügend grosse n, mit welchen wir ausschliesslich zu tun haben, unterscheidet sich die Grösse ρ genügend wenig von $-\frac{p}{n}K$. Daraus folgt nach dem Hilfssatze I und den Ungleichungen (a), dass es zwei von n abhängende und für $n \to \infty$ gegen $\varkappa$ konvergierende Werte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ des Moduls gibt, für welche

$$(28_1) \qquad 2sn^2\left(\frac{n-p}{n}K_1;\ \varkappa_1\right)-1=\beta,$$

$$(28_2) \qquad 1-2sn^2\left(\frac{p}{n}K_2;\ \varkappa_2\right)=\alpha$$

$$(b) \qquad \varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2,$$

wobei K_1 und K_2 die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung in bezug auf $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ bezeichnen. Setzt man jetzt

$$\alpha_1 = 1-2sn^2\left(\frac{p}{n}K_1;\ \varkappa_1\right), \quad \beta_2 = 2sn^2\left(\frac{n-p}{n}K_2;\ \varkappa_2\right)-1$$

und betrachtet man die von n abhängenden Punktmengen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$:

$$\mathcal{E}_1: \quad <-1,\ \alpha_1>,\ <\beta,\ 1>,$$
$$\mathcal{E}_2: \quad <-1,\ \alpha>,\ <\beta_2,\ 1>,$$

so folgt aus (28_1), (28_2) und (b), dass

$$\alpha < \alpha_1, \ \beta < \beta_2$$

oder dass

$$(c) \qquad \mathcal{E}_2 \precsim \mathcal{E} \precsim \mathcal{E}_1.$$

Für $n \to \infty$ gelten offenbar die Beziehungen

$$\alpha_1 \to \alpha, \ \beta_2 \to \beta.$$

Nun nehmen wir die Polynome

$$T_n(x;\ p,\ \varkappa_1) = V_n(x), \ T_n(x;\ p,\ \varkappa_2).$$

Nach dem Satze F weichen diese Polynome bzw. in den Punktmengen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ am wenigsten von Null ab, wobei nach dem Satze D

$$\max_{x \lessgtr \mathcal{E}_1} |V_n(x)| = L_n(p, \varkappa_1), \quad \max_{x \lessgtr \mathcal{E}_2} |T_n(x;\ p, \varkappa_2)| = L_n(p, \varkappa_2).$$

Nun folgt aber aus dem Satze F wegen (c) (vgl. auch die zweite Methode von § 2), dass

$$(29) \qquad L_n(p, \varkappa_2) < m_n \leqslant L_n(p, \varkappa_1).$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass für $n \to \infty$

$$(\mathrm{d}) \qquad \varkappa_1 = \varkappa + 0\left(\frac{\sigma}{n}\right), \quad \varkappa_2 = \varkappa + 0\left(\frac{\sigma}{n}\right).$$

In der Tat, aus (28_1) und (4) folgt, dass

$$sn\left(\frac{n-p}{n} K_1;\ \varkappa_1\right) = sn(K + \rho;\ \varkappa),$$

und aus (23), dass

$$sn(K+\rho;\ \varkappa) = sn\left(\frac{n-p}{n} K;\ \varkappa\right) + \frac{A\sigma}{n}$$

mit einem für $n \to \infty$ beschränkt bleibenden A; daher ist

$$\frac{A\sigma}{n} = sn\left(\frac{n-p}{n} K_1;\ \varkappa_1\right) - sn\left(\frac{n-p}{n} K;\ \varkappa\right) =$$

$$= (\varkappa_1 - \varkappa)\left[\frac{d}{dk} sn\left(\frac{n-p}{n} \mathcal{K};\ k\right)\right]_{k=\varkappa^*},$$

wo $\varkappa_1 < \varkappa^* < \varkappa$, und nach dem Hilfssatze I hat der Faktor von $\varkappa_1 - \varkappa$ eine positive untere Schranke, so dass die erste der Beziehungen (d) bewiesen ist; ebenso verläuft der Beweis der zweiten Beziehung.

Die Gleichungen (d) zeigen, dass für $n \to \infty$

$$(\mathrm{e}) \qquad \frac{L_n(p, \varkappa_1)}{M_n} = 1 + 0(\sigma), \quad \frac{L_n(p, \varkappa_2)}{M_n} = 1 + 0(\sigma),$$

wo M_n vermöge (24_2) definiert wird. In der Tat, aus (19) und (24_2) folgt, dass

$$\frac{L_n(p, \varkappa_1)}{M_n} = \frac{\theta(\rho-\sigma)}{\theta(\rho+\sigma)} \left[\frac{\theta(\rho)\,\theta_1(\rho)}{\theta(0)\,\theta_1(0)}\right]^{2n} \left[\frac{\theta(0;\varkappa_1)\,\theta_1(0;\varkappa_1)}{\theta\left(\frac{p}{n}K_1;\varkappa_1\right)\theta_1\left(\frac{p}{n}K_1;\varkappa_1\right)}\right]^{2n},$$

wo zur Abkürzung

$$\theta(w) = \theta(w \,|\, K;\, iK'),\ \ \theta(w;\, \varkappa_1) = \theta(w \,|\, K_1;\, iK_1'), \ldots$$

gesetzt ist; es ist aber leicht zu sehen, dass

$$\frac{\theta(\rho - \sigma)}{\theta(\rho + \sigma)} = 1 + 0(\sigma),$$

während nach (23) und (d) für $n \to \infty$

$$\theta(\rho) = \theta\left(\frac{p}{n}K\right)\left[1 + 0\left(\frac{\sigma}{n}\right)\right] = \theta\left(\frac{p}{n}K_1;\, \varkappa_1\right)\left[1 + 0\left(\frac{\sigma}{n}\right)\right], \ldots,$$

so dass für $n \to \infty$

$$\left[\frac{\theta(\rho)}{\theta\left(\frac{p}{n}K_1;\, \varkappa_1\right)}\right]^{2n} = \left[1 + 0\left(\frac{\sigma}{n}\right)\right]^{2n} = 1 + 0(\sigma), \ldots;$$

damit ist die erste Beziehung (e) bewiesen, und ebenso kann man auch die zweite beweisen.

Beachtet man jetzt, dass

$$m_n \leqslant \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |V_n(x)| \leqslant \max_{x \lessgtr \mathcal{E}_1} |V_n(x)| = L_n(p,\, \varkappa_1) = M_n[1 + 0(\sigma)]$$

und dass wegen (29) und (e)

$$m_n = M_n[1 + 0(\sigma)],$$

so ergibt sich der folgende Schluss: ist für irgend ein n die Grösse $|\sigma|$ genügend klein, so ist $V_n(x)$ für dieses n mit genügend grosser Annäherung als in $\mathcal{E}$ am wenigsten von Null abweichendes Polynom n-ten Grades anzusehen, und M_n stellt für dieses n genügend genau die kleinste Abweichung m_n dar.

§ 13. **Konstruktion der Polynome $W_n(x)$.** Es sei $x' = -x$, so dass der Punktmenge $\mathcal{E}$ der x-Ebene entspricht die Punktmenge $\mathcal{E}'$

$$\mathcal{E}': \qquad <-1,\, -\beta>,\ <-\alpha,\, 1>$$

der x'-Ebene. Offenbar ist (in den Bezeichnungen von § 3)

$$t_n(x;\, \mathcal{E}) = (-1)^n t_n(x';\, \mathcal{E}'),\ \ m_n(\mathcal{E}) = m_n(\mathcal{E}') = m_n.$$

Nun stellen wir uns die Aufgabe, die Überlegungen des vorigen Paragraphen auf $\mathcal{E}'$, anstatt $\mathcal{E}$, anzuwenden. Wegen (1) bleibt der Modul $\varkappa$ ohne Änderung; nach (5 bis) tritt dagegen anstatt ρ die Grösse

(a) $$\rho' = -K - \rho$$

ein, wobei auch σ durch

(b) $$\sigma' = -K - \sigma$$

ersetzt werden muss. Wegen (23) ergibt sich die Gleichung

(23 bis) $$-n\rho' = p'K - \sigma',$$

wo

(c) $$p' = n - (p + 1).$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man, den Gleichungen (28_1), (28_2) entsprechend, die Werte k_1 und k_2 des Moduls derart bestimmen, dass

(d) $$k_1 < \varkappa < k_2$$

und

(e) $$2sn^2\left(\frac{n-p'}{n}\mathcal{K}_1;\ k_1\right) - 1 = -\alpha,$$
$$1 - 2sn^2\left(\frac{p'}{n}\mathcal{K}_2;\ k_2\right) = -\beta.$$

Wegen (c) können die Gleichungen (e) auch in der Gestalt

(30_1) $$1 - 2sn^2\left(\frac{p+1}{n}\mathcal{K}_1;\ k_1\right) = \alpha,$$

(30_2) $$2sn^2\left(\frac{n-p-1}{n}\mathcal{K}_2;\ k_2\right) - 1 = \beta$$

dargestellt werden.

Nun nehmen wir die Polynome

$$(-1)^n T_n(x';\ p',\ k_1) = W_n(x),\ (-1)^n T_n(x';\ p',\ k_2),$$

welche nach dem Satze C auch in der Form

$$T_n(x;\ p+1,\ k_1) = W_n(x),\ T_n(x;\ p+1,\ k_2)$$

geschrieben werden können.

Es ist leicht zu sehen, dass $(-1)^n W_n(-x')$ in bezug auf $\mathcal{E}'$ dieselbe Rolle spielt, wie $V_n(x)$ (im § 12) in bezug auf $\mathcal{E}$. Daher gelten die Beziehungen

$$L_n(p', k_2) < m_n \leqslant L_n(p', k_1),$$

$$m_n \leqslant \max_{x' \lessgtr \mathcal{E}'} |W_n(-x')| \leqslant L_n(p', k_1)$$

oder nach (c) und (19)

(31) $$L_n(p+1, k_2) < m_n \leqslant L_n(p+1, k_1),$$

(32) $$m_n \leqslant \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |W_n(x)| \leqslant L_n(p+1, k_1),$$

wobei für $n \to \infty$

$$\frac{L_n(p+1, k_1)}{M_n} = 1 + 0(\sigma') = 1 + 0(K+\sigma); \quad \frac{L_n(p+1, k_2)}{M_n} = 1 + 0(K+\sigma),$$

so dass für $n \to \infty$

$$m_n = M_n[1 + 0(K+\sigma)].$$

Existiert also eine unendliche Exponentenfolge $n_1, n_2, \ldots$, für welche $\sigma \to -K$, so weicht in $\mathcal{E}$ für diese Folge (vgl. § 2) das eben konstruierte Polynom $W_n(x)$ asymptotisch am wenigsten von Null ab, wobei

$$m_n \backsim M_n.$$

§ 14. **Allgemeine Sätze über das asymptotische Verhalten der Grösse m_n.** In vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, dass

$$\frac{m_n}{M_n} = \frac{m_n}{\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\theta(\rho+\sigma)}{\theta(\rho-\sigma)} \left[\frac{\theta(0)\,\theta_1(0)}{\theta(\rho)\,\theta_1(\rho)}\right]^{2n}} \to 1,$$

falls n derart ins Unendliche wächst, dass eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$1,^0 \quad -K + \delta < \sigma < -\delta,$$

$$2,^0 \quad \sigma \to 0,$$

$$3,^0 \quad \sigma \to -K.$$

Ausserdem besteht, wie wir wissen, die genaue Gleichung

$$m_n = M_n,$$

falls $\sigma = 0$ (der triviale Fall). Aus dem Hilfssatze II ergibt sich daher der

Satz V. Sind die Grössen $\varkappa$, ρ, σ bestimmt aus (1), (2) und (23), so besteht die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\theta(\rho+\sigma)}{\theta(\rho-\sigma)} \left[\frac{\theta(0)\theta_1(0)}{\theta(\rho)\theta_1(\rho)}\right]^{2n}} = 1. \tag{33}$$

Bezeichnet dabei $Q_n(x)$ dasjenige unter den Polynomen $U_n(x)$, $V_n(x)$, $W_n(x)$, welches in $\mathcal{E}$ den kleinsten Maximum des absoluten Betrages hat, falls $\sigma \neq 0$, und $T_n(x; p, \varkappa)$, falls $\sigma = 0$, so besteht für $n \to \infty$ die asymptotische Gleichung

$$\max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |Q_n(x)| \sim m_n.$$

Satz VI. Der transfinite Durchmesser τ der Punktmenge $\mathcal{E}$ hat den Wert

$$\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta(0)\theta_1(0)}{\theta(\rho)\theta_1(\rho)}\right]^2. \tag{34}$$

Beweis folgt unmittelbar aus (33) wegen des Satzes von M. Fekete (§ 3).

Satz VII. Ist die nur von $\mathcal{E}$ abhängende Zahl

$$-\frac{\rho}{K} = R$$

irrational, so existiert für jede der Ungleichung

$$-K < \omega \leqq 0$$

genügende Grösse ω eine solche unendliche Exponentenfolge $n_1, n_2, n_3, \ldots$, dass für $i \to \infty$

$$m_{n_i} \sim 2\tau^{n_i} \frac{\theta(\rho+\omega)}{\theta(\rho-\omega)}.$$

Ist dagegen die Zahl R rational und hat sie nach der Vereinfachung die Gestalt

$$R = \frac{P}{Q},$$

so nimmt die Grösse σ bei Änderung der Zahl n nur Q verschiedene Werte

$$\sigma^{(\mu)} = -\frac{\mu}{Q} K \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, Q-1)$$

an, welche derart sämtlichen Restklassen nach dem Modul Q entsprechen, dass für jede aus allen nach dem Modul Q untereinander kongruenten Zahlen bestehende Exponentenfolge eine der Q asymptotischen Beziehungen

$$m_n \backsim 2\tau^n \frac{\theta(\rho + \sigma^{(\mu)})}{\theta(\rho - \sigma^{(\mu)})} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, Q-1)$$

bestehen wird (für $\mu = 0$ ist diese Beziehung sogar eine genaue Gleichung).

Beweis. Der zweite Teil des Satzes ist klar.

Ist R irrational, so folgt aus dem Satze[12] von Tschebyscheff, dass es zwei unendliche Folgen naturalen Zahlen

$$p_1, p_2, p_3, \ldots; \quad n_1, n_2, n_3, \ldots$$

gibt, für welche

$$-\frac{2}{n} < p - Rn - \frac{\omega}{K} < 0.$$

Setzt man daher der Beziehung (23) gemäss

$$\sigma = K(p - Rn),$$

so ergibt sich, dass für die Exponentenfolge $n_1, n_2, n_3, \ldots$

$$\sigma \rightarrow \omega,$$

woraus der erste Teil des Satzes wegen (33) und (34) unmittelbar folgt.

Bemerkung. Der bewiesene Satz VII kann als Verallgemeinerung auf zwei Intervalle der im § 3 für ein Intervall erwähnten Formel

$$m_n = 2\tau^n$$

betrachtet werden.

§ 15. **Beispiel.** Um die allgemeine Theorie an einem einfachen Beispiele zu erläutern, nehmen wir den Fall

(a) $$\alpha = -\beta,$$

so dass

(b) $$\varkappa^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2},$$

$$\frac{1+\beta}{2} = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1}{1+\varkappa'} = sn^2 \frac{K}{2}$$

und also

(c) $$\rho = -\frac{K}{2}.$$

[12] P. Tschebyscheff, Über eine arithmetische Frage (Gesam. Abhandl., Bd. I).

Bezeichnet ν eine naturale Zahl, so folgt aus (23), dass für $n = 2\nu$:

$$p = \nu, \quad \sigma = 0$$

und für $n = 2\nu - 1$:

$$p = \nu - 1, \quad \sigma = -\frac{K}{2}.$$

Für gerade n haben wir somit den trivialen Fall der Aufgabe, so dass

$$\text{(d)} \qquad t_{2\nu}(x) = T_{2\nu}(x; \nu, \varkappa) = \frac{m_{2\nu}}{2}\left\{\left[\frac{H\left(u - \frac{K}{2}\right)}{H\left(u + \frac{K}{2}\right)}\right]^{2\nu} + \left[\frac{H\left(u + \frac{K}{2}\right)}{H\left(u - \frac{K}{2}\right)}\right]^{2\nu}\right\},$$

wo

$$\text{(e)} \qquad x = \frac{sn^2 u \cdot cn^2 \frac{K}{2} + cn^2 u \cdot sn^2 \frac{K}{2}}{sn^2 u - sn^2 \frac{K}{2}},$$

$$m_{2\nu} = \frac{1}{2^{2\nu-1}}\left[\frac{\theta(0)\,\theta_1(0)}{\theta\left(\frac{K}{2}\right)\theta_1\left(\frac{K}{2}\right)}\right]^{4\nu}.$$

Beachtet man jetzt, dass

$$\theta(0) = \theta_1(0)\sqrt{\varkappa'} = \theta_1(0)\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},$$

$$\theta^4\left(\frac{K}{2}\right) = \theta_1^4\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{\theta^3(0)\,\theta_1(0)}{\frac{2\varkappa'}{1+\varkappa'}} = \frac{\theta^3(0)\,\theta_1(0)}{1-\beta},$$

so ergibt sich die Formel

$$\text{(f)} \qquad m_{2\nu} = \frac{1}{2^{2\nu-1}}(1-\beta^2)^{\nu},$$

so dass

$$\text{(g)} \qquad \tau = \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}, \quad m_{2\nu} = 2\tau^{2\nu}.$$

Ehe wir zur Betrachtung ungerader n übergehen, wollen wir noch den Ausdruck für $t_{2\nu}(x)$ auf eine einfachere Form transformieren.[13] Dazu setzen wir

$$y = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{H\left(u - \frac{K}{2}\right)}{H\left(u + \frac{K}{2}\right)}\right]^2 + \left[\frac{H\left(u + \frac{K}{2}\right)}{H\left(u - \frac{K}{2}\right)}\right]^2\right\};$$

[13] Man könnte diese einfache Form für $t_{2\nu}(x)$ unmittelbar erhalten, wenn man bemerkte, dass wegen (a)

$$t_{2\nu}(-x) = t_{2\nu}(x),$$

und wenn man anstatt x die Veränderliche $\xi = x^2$ einführte.

dieser Ausdruck unterscheidet sich von $T_2(x; 1, \varkappa)$ nur um einen konstanten Faktor und da für $u = 0, iK', -K$ die Grösse x die Werte $x = -1, -\beta, 1$, während die Grösse y die Werte $y = 1, -1, 1$ annimmt, so ist

$$y = \frac{2x^2 - 1 - \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Betrachtet man nun $t_{2\nu}(x) = T_{2\nu}(x; \nu, \varkappa)$ als Funktion von y und erinnert man die Formeln (a), (b) von § 8, so ergibt sich, dass

(h) $$t_{2\nu}(x) = m_{2\nu} \cos \nu \arccos y = m_{2\nu} \cos \nu \arccos \frac{2x^2 - 1 - \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Jetzt gehen wir zur Untersuchung ungerader n; da für diese n, wie bemerkt, $\sigma = -\frac{K}{2}$, so folgt aus dem Satze V, dass

$$m_{2\nu-1} \sim \frac{1}{2^{2\nu-2}} \frac{\theta(K)}{\theta(0)} \left[\frac{\theta(0)\,\theta_1(0)}{\theta\left(\frac{K}{2}\right)\theta_1\left(\frac{K}{2}\right)} \right]^{4\nu-2}$$

oder

(i) $$m_{2\nu-1} \sim \frac{1}{2^{2\nu-2}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{2\nu-1} = 2\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tau^{2\nu-1}.$$

Wir wollen noch den Fehler abschätzen, welchen wir machen, wenn wir die Abweichung $m_{2\nu-1}$ durch

$$2\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tau^{2\nu-1}$$

ersetzen. Dazu dienen die Formeln (26) und (f) von § 11. Eine leichte Rechnung zeigt, dass im unseren Falle

$$2\,\frac{\theta^2(\sigma)\,\theta_1^2(\sigma)}{\theta^2(0)\,\theta_1^2(0)} \left[\frac{\theta(\rho-\sigma)}{\theta(\rho+\sigma)}\right]^{2\nu-1} = \frac{2}{1+\beta}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\nu-1},$$

und somit entsteht die gewünschte Abschätzung

(k) $$\left| \frac{m_{2\nu-1}}{2\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tau^{2\nu-1}} - 1 \right| < \frac{2}{1+\beta}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\nu-1}.$$

Im folgenden Paragraphen werden wir zeigen, dass auch für $t_{2\nu-1}(x)$ der genaue Ausdruck in elliptischen Funktionen gebildet werden kann.

Diese einfachen Verhältnisse sind Folgerungen der Annahme (a); im allgemeinen reicht schon der elliptischen Funktionen zur genauen Darstellung von $t_n(x)$ (vgl. Kapitel VIII dieser Arbeit) nicht.

§ **16. Beispiel (Fortsetzung).** Ist

$$\max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |t_{2\nu-1}(x)| = m_{2\nu-1},$$

wobei hier $\mathcal{E}$ die Punktmenge

$$< -1, -\beta >, \ < \beta, 1 >$$

bezeichnet, so ist auch

$$\max_{x \lessgtr \mathcal{E}} \left| \frac{t_{2\nu-1}(x) - t_{2\nu-1}(-x)}{2} \right| = m_{2\nu-1};$$

daher hat $t_{2\nu-1}(x)$ die Gestalt

(a) $$t_{2\nu-1}(x) = x^{2\nu-1} + p_3 x^{2\nu-3} + \cdots + p_{2\nu-1} x.$$

Nach dem Satze II besteht somit unsere Aufgabe im folgenden: es soll ein Polynom der Form (a) konstruiert werden, welches den Wert

$$m_{2\nu-1} = \max_{\beta \leq x \leq 1} |t_{2\nu-1}(x)|$$

mit abwechselnden Vorzeichen in ν aufeinander folgenden Punkten des Intervalls $< \beta, 1 >$ annimmt.

Um Verwechselungen mit den bisherigen Bezeichnungen zu vermeigen, wollen wir in diesem Paragraphen den Modul der elliptischen Funktionen durch λ und die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung in bezug auf λ und $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$ bzw. durch Λ und Λ' bezeichnen.

Wir bestimmen zunächst den Modul λ aus der Gleichung

(b) $$\beta = sn\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}; \lambda\right)$$

und führen anstatt x die neue Veränderliche u mittels der Formel

(c) $$x = \frac{\beta\, cn(u;\lambda)}{\sqrt{\beta^2 - sn^2(u;\lambda)}}$$

(bei der Zusatzbedingung: $x = 1$ für $u = 0$) ein.

Dann hat das gesuchte Polynom $t_{2\nu-1}(x)$ die Gestalt

$$\text{(d)}\qquad t_{2\nu-1}(x)=\frac{m_{2\nu-1}}{2}\left\{\left[\frac{H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}+u\right)}{H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}-u\right)}\right]^{\nu-\frac{1}{2}}+\left[\frac{H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}-u\right)}{H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}+u\right)}\right]^{\nu-\frac{1}{2}}\right\},$$

wo

$$\text{(e)}\qquad m_{2\nu-1}=\frac{1}{2^{2\nu-2}}\left[\frac{\theta(0)\cdot\theta_1(0)}{\theta\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}\right)\theta_1\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}\right)}\right]^{2\nu-1}.$$

Um diese Behauptung zu beweisen,[14] müssen wir zunächst zeigen, dass die Formeln (b), (c), (d) wirklich ein ungerades Polynom vom Grade $2\nu-1$ definieren. Dazu genügt zu beweisen, dass

$$\varphi(u)=\frac{t_{2\nu-1}(x)}{x}=\frac{m_{2\nu-1}}{2}\,\frac{H_1(0)}{H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}\right)}\,\frac{1}{H_1(u)}\,\frac{\left[H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}+u\right)\right]^{2\nu-1}+\left[H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}-u\right)\right]^{2\nu-1}}{\left[H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}+u\right)\cdot H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}-u\right)\right]^{\nu-1}}$$

ein Polynom von Grade $\nu-1$ in bezug auf x^2 ist.

Dies folgt aber unmittelbar aus den evidenten Eigenschaften

$$\varphi(-u)=\varphi(u)=\varphi(u+2\Lambda)=\varphi(u+2i\Lambda')$$

der Funktion $\varphi(u)$ und aus der Tatsache, dass $\varphi(u)$ nur für

$$u\equiv\pm\frac{\Lambda}{2\nu-1}$$

(mod. 2Λ, $2i\Lambda'$), d. h. für $x^2=\infty$, unendlich wird, während nach (e)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(u)}{x^{2\nu-2}}=1.$$

Nun erfährt die Grösse

$$\arg\left[\frac{H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}+u\right)}{H\left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}-u\right)}\right]^{\nu-\frac{1}{2}},$$

falls u die Strecke der imaginären Achse von $i\Lambda'$ bis 0 durchläuft, einen Zuwachs vom Betrage $(\nu-1)\pi$, wie dies aus Überlegungen folgt, welche

[14] Vgl. N. Achyeser, Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen (Nachr. von der Physik.-Math. Gesellschaft an der Univ. Kazan, Ser. III, Bd. 3, H. 2, 1928).

denjenigen ähnlich sind, die beim Beweise des Satzes D entwickelt worden sind. Da aber bei dieser Änderung der Grösse u die Veränderliche x das Intervall $< \beta, 1 >$ durchläuft, so nimmt $t_{2\nu-1}(x)$ wirklich den Wert

$$m_{2\nu-1} = \max_{\beta \leq x \leq 1} |t_{2\nu-1}(x)|$$

mit abwechselnden Vorzeichen in ν aufeinander folgenden Punkten des Intervalls $< \beta, 1 >$ an. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Es ist nicht ohne Interesse die asymptotische Beziehung (i) von § 15 aus der genauen Formel (e) abzuleiten.

Dazu bemerken wir zunächst, dass für $\nu \to \infty$ nach (b) auch Λ unbegrenzt wachsen muss; daher ist für $\nu \to \infty$:

$$\lambda \to 1, \ \lambda' \to 0.$$

Definiert man die Grösse M mittels der Gleichung

(f) $$\beta = \operatorname{tghyp} M$$

so zeigt (b), dass

(g) $$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\Lambda}{2\nu - 1} = M;$$

und da, wie bekannt,[15]

$$\lim_{\lambda' \to 0} \lambda'^2 e^{\pi \frac{\Lambda}{\Lambda'}} = 16,$$

so gilt die Gleichung

(h) $$\lim_{\lambda' \to 0} \lambda' e^{M(2\nu-1)} = \lim_{\nu \to \infty} \lambda' e^{M(2\nu-1)} = 4.$$

Geht man in (e) vom Modul λ zum komplementären Modul λ' über, so ergibt sich, dass

$$m_{2\nu-1} = \frac{1}{2^{2\nu-2}} \left[\frac{\theta(0; \lambda')\, \theta_1(0; \lambda')}{\theta\left(\frac{i\Lambda}{2\nu-1}; \lambda'\right) \theta_1\left(\frac{i\Lambda}{2\nu-1}; \lambda'\right)} \, cn \left(\frac{\Lambda}{2\nu-1}; \lambda\right)\right]^{2\nu-1} e^{\frac{\pi}{2(2\nu-1)} \frac{\Lambda}{\Lambda'}}$$

oder

(i) $$m_{2\nu-1} = \frac{(\sqrt{1-\beta^2})^{2\nu-1}}{2^{2\nu-2}} \left[\frac{\theta(0; \lambda') \cdot \theta_1(0; \lambda')}{\theta\left(\frac{i\Lambda}{2\nu-1}; \lambda'\right) \theta_1\left(\frac{i\Lambda}{2\nu-1}; \lambda'\right)}\right]^{2\nu-1} e^{\frac{\pi}{2(2\nu-1)} \frac{\Lambda}{\Lambda'}}.$$

[15] H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen.

Nun gelten für $\lambda' \to 0$ (und also für $\nu \to \infty$) nach (f) und (g) folgende Entwicklungen[15]

$$\theta(0;\lambda') = 1 - 2h' + 2h'^4 - \cdots = 1 - \frac{1}{8}\lambda'^2 + \cdots,$$

$$\theta_1(0;\lambda) = 1 + 2h' + 2h'^4 + \cdots = 1 + \frac{1}{8}\lambda'^2 + \cdots,$$

$$\theta\left(\frac{i\Lambda}{2\nu-1};\lambda'\right) = 1 - 2h' \operatorname{coshyp}\frac{\pi\Lambda}{(2\nu-1)\Lambda'} + \cdots = 1 - \frac{1}{8}\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\lambda'^2 + \cdots,$$

$$\theta_1\left(\frac{i\Lambda}{2\nu-1};\lambda'\right) = 1 + 2h' \operatorname{coshyp}\frac{\pi\Lambda}{(2\nu-1)\Lambda'} + \cdots = 1 + \frac{1}{8}\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\lambda'^2 + \cdots,$$

wo $h' = e^{-\pi\frac{\Lambda}{\Lambda'}}$ und die fehlenden Gliedern enthalten höhere Potenzen von λ'.

Setzt man diese Entwicklungen in (i) ein, so ergibt sich, dass

$$m_{2\nu-1} = \frac{1}{2^{2\nu-2}}\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{2\nu-1}\{1 + A\lambda'^3 + \cdots\}^{2\nu-1} e^{\frac{\pi}{2(2\nu-1)}\frac{\Lambda}{\Lambda'}},$$

und da nach (f), (g), (h) für $\nu \to \infty$:

$$e^{\frac{\pi}{2(2\nu-1)}\frac{\Lambda}{\Lambda'}} \to e^{M} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \{1 + A\lambda'^3 + \cdots\}^{2\nu-1} \to 1,$$

so ist

$$m_{2\nu-1} \sim \frac{1}{2^{2\nu-2}}\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{2\nu-1}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

und die asymptotische Formel von § 15 ist aufs Neue bewiesen.

V Kapitel

Über das asymptotische Verhalten der Grösse $m_n[s_l(x)]$

§ **17. Einleitung.** In diesem Kapitel werden wir uns beschäftigen mit dem asymptotischen (falls $n \to \infty$) Verhalten der Grösse $m_n[s_l(x)]$, welche im § 3 definiert worden ist, wobei

(35) $$s_l(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l)$$

ein gegebenes reelles Polynom bezeichnet, dessen alle Wurzeln ausserhalb der Punktmenge $\mathcal{E}$ liegen und zur Vereinfachung der Überlegungen als

voneinander verschieden angenommen mögen, obwohl, wie es leicht zu sehen wird, die im folgenden beweisenden Sätze auch im allgemeinen Falle, wo es unter den Zahlen a_i gleiche gibt, ihre Gültigkeit nicht verlieren. Der grösseren Bestimmtheit halber sei noch angenommen, dass aus den Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_l$$

in dem Interwalle (α, β) nur die ersten j gelegen sind.

Um die hier gestellte Aufgabe zu lösen, werden wir (ebenso wie im vorigen Kapitel) gewisse Systeme ganzer rationalen Funktionen konstruieren.

Ehe wir dazu übergehen, wollen wir einige Bezeichnungen und Formeln zusammenstellen, um später Wiederholungen zu vermeiden.

Es bezeichnen zunächst, wie früher, $\varkappa$ und ρ die vermöge (1) und (2) bestimmten Grössen und es seien x und u, wie früher, durch die Gleichung (5) verbunden.

Bei der Transformation (5) mögen den Zahlen $a_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ die Grössen

$$t_\lambda = r_\lambda + is_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{36}$$

entsprechen, wobei

$$-K < r_\lambda < 0, \ -K' < s_\lambda \leqslant K' \tag{37}$$

und unserer Voraussetzung zufolge sind die ersten j aus den Zahlen s_λ gleich K' und alle übrigen numerisch kleiner als K'; ausserdem muss noch bemerkt werden, dass diejenigen unter den Zahlen t_λ, für welche

$$0 < |s_\lambda| < K',$$

paarweise konjugeiert komplex sind.

Der Zusammenhang zwischen den Zahlen a_λ und t_λ hat die Gestalt

$$a_\lambda = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2sn^2\, t_\lambda + \alpha - 1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{38}$$

Der Beziehung (23) entsprechend setzen wir jetzt

$$-(n+l)\rho + r_1 + r_2 + \ldots + r_l = pK - \sigma_l, \tag{39}$$

wodurch für jedes n eine ganze Zahl p und eine der Ungleichung

$$-K < \sigma_l \leqslant 0$$

genügende Grösse σ_l definiert sind; für genügend grosse n ist offenbar p positiv, und da im folgenden nur solche n betrachtet werden, so können wir die Ungleichung

$$0 < p < n + l$$

als erfüllt voraussetzen.

Neben den Zahlen ρ, t_1, t_2, ..., t_l sollen noch für jedes genügend grosse n gewisse veränderliche Grössen

$$\text{(a)} \qquad P,\ T_\lambda = R_\lambda + iS_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

betrachtet werden, welche wir folgendermassen definieren wollen: wir sehen von den Gleichungen (1), (2) ab und nehmen das System

$$\text{(40)} \qquad a_\lambda = \frac{sn^2(T_\lambda; k)\, cn^2(P; k) + cn^2(T_\lambda; k)\, sn^2(P; k)}{sn^2(T_\lambda; k) - sn^2(P; k)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

$$\text{(41)} \qquad -(n + l)P + R_1 + \ldots + R_l = p\mathcal{K},$$

wo p die oben bestimmte ganzzahlige Funktion von n ist und der Modul k als unabhängige Veränderliche betrachtet werden soll.

Die Gleichungen (40) und (41) definieren für jedes genügend grosse n (mit welchen wir ausschliesslilh zu tun haben) die Grössen

$$P, T_\lambda = R_\lambda + iS_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

als gewisse Funktionen des Moduls k:

$$P = P(k);\ T_\lambda = T_\lambda(k),\ R_\lambda = R_\lambda(k),\ S_\lambda = S_\lambda(k) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l);$$

für welche die Ungleichungen

$$\text{(b)} \qquad -\mathcal{K} < P < 0,\ -\mathcal{K} < R_\lambda < 0,\ -\mathcal{K}' < S_\lambda \leqslant \mathcal{K}'$$

bestehen werden, falls nur, was immer im folgenden vorausgesetzt wird, die Werte des Moduls k sich wenig von $\varkappa$ unterscheiden; dabei werden aus den Grössen S_λ nur die ersten j gleich $\mathcal{K}'$ sein.

Ist für irgend ein n die oben definierte Grösse σ_l gleich Null, so gelten offenbar die Gleichungen

$$\rho = P(\varkappa),\ r_\lambda = R_\lambda(\varkappa),\ s_\lambda = S_\lambda(\varkappa) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\text{(42)} \qquad R_1 + R_2 + \ldots + R_l = -D = -D(k),$$

so kann man (41) in der Gestalt

(41 bis) $$-P = \frac{p\mathscr{K} + D}{n+l}$$

darstellen.

In bezug auf das System (a) entsprechen den Zahlen α, β die veränderlichen Grössen (Funktionen von k)

(43) $$1 - 2sn^2(P;\,k) = A(k) = A;\quad 2sn^2(\mathscr{K} + P;\,k) - 1 = B(k) = B;$$

ist für irgend ein n die Grösse σ_l gleich Null, so gelten offenbar die Gleichungen

$$A(\varkappa) = \alpha,\quad B(\varkappa) = \beta.$$

Nun wollen wir vermöge der hier eingeführten Grössen eine rationale Hilfsfunktion $F_n(x;\,a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_l;\,p,\,k)$ konstruieren, wobei n stets als genügend gross und der numerische Wert der Differenz $k - \varkappa$ als genügend klein vorausgesetzt sind, so dass die Ungleichungen (b) als erfüllt angesehen werden können.

Dazu setzen wir

(44_1) $$F_n(x;\,a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_l;\,p,\,k) = \frac{L_n^{(l)}}{2}\{\Phi(u) + \Phi(-u)\},$$

(44_2) $$\Phi(u) = (-1)^{l-j}\left[\frac{H(u-P)}{H(u+P)}\right]^{n+l}\frac{\Theta(u+R_1)\ldots\Theta(u+R_j)H(u+T_{j+1})\ldots H(u+T_l)}{\Theta(u-R_1)\ldots\Theta(u-R_j)H(u-T_{j+1})\ldots H(u-T_l)},$$

(44_3) $$x = \frac{sn^2(u;\,k)\,cn^2(P;\,k) + cn^2(u;\,k)\,sn^2(P;\,k)}{sn^2(u;\,k) - sn^2(P;\,k)},$$

$$L_n^{(l)} =$$

(44_4) $$= \frac{1}{2^{n+l-1}}\left[\frac{\Theta(0)\Theta_1(0)}{\Theta(P)\Theta_1(P)}\right]^{2(n+l)}\frac{\Theta(R_1+P)\ldots\Theta(R_j+P)H(T_{j+1}+P)\ldots H(T_l-P)}{\Theta(R_1-P)\ldots\Theta(R_j-P)H(T_{j+1}-P)\ldots H(T_l-P)} =$$
$$= L_n^{(l)}(p,\,k).$$

Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$F_n(x;\,a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_l;\,p,\,k) = \frac{x^{n+2l} + b_1\,x^{n+2l-1} + \ldots + b_{n+2l}}{(x-a_1)(x-a_2\ldots(x-a_l)},$$

wo alle Koeffizienten $b_1,\,b_2,\ldots,\,b_{n+2l}$ reell sind.

Daher kann man $F_n(x; a_1, a_2, \ldots, a_l; p, k)$ auch in der Gestalt

$$(45)\quad \begin{aligned} &F_n(x; a_1, a_2, \ldots, a_l; p, k) = \\ &= (x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l) + \\ &+ (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l)\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{B_\lambda}{x-a_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{l}\frac{B'_\lambda}{x-a_\lambda} \end{aligned}$$

darstellen.

Es sei jetzt zur Abkürzung

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = P_n(x; a_1, a_2, \ldots a_l; p, k) = P_n(x; p, k),$$

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l)\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{B_\lambda}{x-a_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{l}\frac{B'_\lambda}{x-a_\lambda} = \Psi_n(x)$$

gesetzt, sodass

$$(45\text{ bis})\quad F_n(x; a_1, a_2, \ldots a_l; p, k) = P_n(x; p, k)\, s_l(x) + \Psi_n(x).$$

Bemerkt man, dass

$$B'_\lambda = \lim_{x \to a_\lambda}(x-a_\lambda) F_n(x; a_1, a_2, \ldots, a_l; p, k),$$

$$s'_l(a_\lambda) B_\lambda = \lim_{x \to a_\lambda}\left\{F_n(x; a_1, a_2, \ldots, a_l; p, k) - \frac{B'_\lambda}{x-a_\lambda}\right\} - \sum_{i=1}^{l}{}' \frac{B'_i}{a_\lambda - a_i},$$

und bezeichnet man durch $\Omega = \Omega(p, k)$ die grösste unter den Zahlen

$$\left|\frac{H(T_\lambda - P)}{H(T_\lambda + P)}\right| \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

welche nach (b) und (10) sämtlich kleiner als Eins sind, so zeigt eine leichte Rechnung, dass

$$|B'_\lambda| < C|L_n^{(l)}|\Omega^{n+l}, \quad |B_\lambda| < nC|L_n^{(l)}|\Omega^{n+l} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

wo C von n und λ unabhängig ist.

Bezeichnet daher E die Punktmenge

$$<-1, A>, <B, 1>

so besteht für alle genügend grosse n die Ungleichung

$$\varepsilon_n(k) = \frac{\max\limits_{x \lessgtr E} |\Psi_n(x)|}{|L_n^{(l)}(p, k)|} < \mathfrak{A}[\Omega(p, k)]^{n+l}, \tag{46}$$

wo $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(k)$ von n unabhängig ist.

Nun ist die Funktion (44_1) ein Speziellfall der im § 5 eingeführten Funktion $r(x)$, wobei hier $\mathsf{M} = n + l$, $\mathsf{M}_0 = 0$, $\mathsf{N} = l$, $\mathsf{N}_0 = j$. Daraus folgt, dass:

1°, der maximale absolute Betrag der Funktion

$$F_n(x; a_1, a_2, \ldots, a_l; p, k)$$

in E den Wert $|L_n^{(l)}(p, k)|$ hat;

2°, die Gesamtanzahl der Abweichungsstellen dieser Funktion in E nicht kleiner als $2 + \mathsf{M} - \mathsf{N} = n + 2$ ist.

Bemerkung. Man kann leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} F_n(-x; -a_1, -a_2, \ldots, -a_l; n-p, k) = \\ = (-1)^{n+l} F_n(x; a_1, a_2, \ldots, a_l; p, k). \end{aligned} \tag{47}$$

Den Beweis überlassen wir dem Leser.

§ 18. **Konstruktion der Polynome** $X_n(x)$. Es sei n irgend eine (genügend grosse) naturale Zahl; ist für dieses n die Grösse σ_l gleich Null, so setze ich

$$X_n(x) = P_n(x; a_1, a_2, \ldots, a_l; p, \varkappa). \tag{48}$$

Es sei jetzt σ_l von Null verschieden. In diesem Falle folgt aus (2), (4) und (39), dass

$$1 - 2sn^2\left[\frac{pK + d}{n+l}; \varkappa\right] > \alpha, \quad 2sn^2\left[\frac{(n+l-p)K - d}{n+l}; \varkappa\right] - 1 > \beta,$$

wo

$$d = -r_1 - r_2 - \ldots - r_l;$$

für genügend grosses n (und nur solche werden hier betrachtet) ist daher auch

$$\begin{aligned} 1 - 2sn^2\left[\frac{pK + D(\varkappa)}{n+l}; \varkappa\right] > \alpha, \\ 2sn^2\left[\frac{(n+l-p)K - D(\varkappa)}{n+l}; \varkappa\right] - 1 > \beta. \end{aligned} \tag{a}$$

Nach dem Hilfssatze I gibt es also zwei von n abhängende und für $n \to \infty$ gegen $\varkappa$ konvergierende Werte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ des Moduls, für welche

$$(49_1)\qquad 2sn^2\left[\frac{(n+l-p)K_1-D(\varkappa_1)}{n+l};\ \varkappa_1\right]-1=B(\varkappa_1)=\beta,$$

$$(49_2)\qquad 1-2sn^2\left[\frac{pK_2+D(\varkappa_2)}{n+l};\ \varkappa_2\right]=A(\varkappa_2)=\alpha,$$

$$(b)\qquad \varkappa_1<\varkappa<\varkappa_2.$$

Setzt man jetzt

$$\alpha_1=A(\varkappa_1),\ \ \beta_2=B(\varkappa_2)$$

und betrachtet man die von n abhängenden Punktmengen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$:

$$\mathcal{E}_1:\qquad <-1,\alpha_1>,\ <\beta,1>,$$
$$\mathcal{E}_2:\qquad <-1,\alpha>,\ <\beta_2,1>,$$

so folgt aus (49_1), (49_2) und (b), dass

$$\alpha<\alpha_1,\ \ \beta<\beta_2$$

oder dass

$$(c)\qquad \mathcal{E}_2\lesssim\mathcal{E}\lesssim\mathcal{E}_1.$$

Für $n\to\infty$ gelten offenbar die Beziehungen

$$\alpha_1\to\alpha,\quad \beta_2\to\beta.$$

Ich setze jetzt

$$(50)\qquad X_n(x)=P_n(x;a_1,a_2,\ldots,a_l;p,\varkappa_1)$$

und nehme auch das Polynom

$$P_n(x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l;\ p,\ \varkappa_2).$$

Aus (45 bis), (46) und (c) geht hervor, dass

$$(d)\ m_n[s_l(x)]\leqslant\max_{x\lesssim\mathcal{E}}|X_n(x)s_l(x)|\leqslant\max_{x\lesssim\mathcal{E}_1}|X_n(x)s_l(x)|\leqslant|L_n^{(l)}(p,\varkappa_1)|[1+\varepsilon_n(\varkappa_1)];$$

anderseits folgt aus denselben Gleichungen nach dem Satze I, dass

$$(e)\qquad |L_n^{(l)}(p,\ \varkappa_2)|[1-\varepsilon_n(\varkappa_2)]\leqslant m_n[s_l(x);\ \mathcal{E}_2]\leqslant m_n[s_l(x)].$$

Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Beziehungen (d) und (e) auch dann gültig bleiben, wenn für das betrachtete n die Grösse σ_l gleich Null ist; es müssen nur in diesem Falle die Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ durch $\varkappa$ ersetzt werden.

Nun wollen wir zeigen, dass für $n \to \infty$:

$$\varkappa_1 = \varkappa + 0\left(\frac{\sigma_l}{n}\right), \quad \varkappa_2 = \varkappa + 0\left(\frac{\sigma_l}{n}\right). \tag{f}$$

In der Tat, folgt aus (49_2), (2) und (39), dass

$$sn\left[\frac{pK_2 + D(\varkappa_2)}{n+l};\ \varkappa_2\right] = sn\left[\frac{pK + d - \sigma_l}{n+l};\ \varkappa\right],$$

und es ist anderseits leicht zu sehen, dass

$$sn\left[\frac{pK + d - \sigma_l}{n+l};\ \varkappa\right] = sn\left[\frac{pK + D(\varkappa)}{n+l};\ \varkappa\right] + \frac{B\sigma_l}{n}$$

mit einem für $n \to \infty$ beschränkt bleibenden B; daher ist

$$\frac{B\sigma_t}{n} = sn\left[\frac{pK_2 + D(\varkappa_2)}{n+l};\ \varkappa_2\right] - sn\left[\frac{pK + D(\varkappa)}{n+l};\ \varkappa\right],$$

woraus die zweite der Beziehungen (f) unmittelbar nach dem Hilfssatze I folgt, uud ebenso verläuft der Beweis der ersten Beziehung.

Ein Vergleich der Gleichungen (40), (41) mit den Formeln (2), (38), (39) zeigt, dass für $n \to \infty$ wegen (f)

$$\left.\begin{aligned} T_\lambda(\varkappa_1) - t_\lambda &= 0\left(\frac{\sigma_l}{n}\right), & T_\lambda(\varkappa_2) - t_\lambda &= 0\left(\frac{\sigma_l}{n}\right) \\ P(\varkappa_1) - \rho &= 0\left(\frac{\sigma_l}{n}\right), & P(\varkappa_2) - \rho &= 0\left(\frac{\sigma_l}{n}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l), \tag{g}$$

Wenn wir also die Bezeichnung

$$M_n^{(l)} = \tag{51}$$
$$= \pm \frac{1}{2^{n+l-1}} \left[\frac{\Theta(0)\Theta_1(0)}{\Theta(\rho)\Theta_1(\rho)}\right]^{2(n+l)} \frac{\Theta(\rho+\sigma_l)\Theta(r_1+\rho)\ldots\Theta(r_j+\rho)H(t_{j+1}+\rho)\ldots H(t_l+\rho)}{\Theta(\rho-\sigma_l)\Theta(r_1-\rho)\ldots\Theta(r_j-\rho)H(t_{j+1}-\rho)\ldots H(t_l-\rho)}$$

einführen, so dass nach (34)

$$(52_1) \qquad M_n^{(l)} = 2\tau^n \frac{\Theta(\rho + \sigma_l)}{\Theta(\rho - \sigma_l)} \mathfrak{M}_l,$$

wo $\mathfrak{M}_l$ von n unabhängig ist und leicht auf die Form

$$(52_2) \qquad \mathfrak{M}_l = \prod_{\lambda=1}^{l} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \left| \frac{H(t_\lambda + \rho)}{H(t_\lambda - \rho)} \right| \right\}$$

gebracht werden kann, so zeigt eine Überlegung, welche derjenigen des § 12 ähnlich ist, dass für $n \to \infty$ wegen (f) und (g):

$$(h) \qquad \frac{L_n^{(l)}(p, \varkappa_1)}{M_n^{(l)}} = 1 + 0(\sigma_l), \quad \frac{L_n^{(l)}(p, \varkappa_2)}{M_n^{(l)}} = 1 + 0(\sigma_l).$$

Es ist leicht zu sehen, wie diese Beziehungen sich vereinfachen, falls für irgend ein n die Grösse σ_l gleich Null ist.

Aus der Definition der Grösse $\Omega(p, k)$ folgt wegen (f), dass für $n \to \infty$ die beiden Grössen $\Omega(p, \varkappa_1)$ und $\Omega(p, \varkappa_2)$ eine gemeinsame Grenze ω $(0 < \omega < 1)$ haben, und da dabei auch $\mathfrak{A}(\varkappa_1)$ und $\mathfrak{A}(\varkappa_2)$ beschränkt bleiben, so folgt aus (d), (e), (h), (46), dass für $n \to \infty$

$$(i) \qquad \frac{m_n[s_l(x)]}{2\tau^n \frac{\Theta(\rho + \sigma_l)}{\Theta(\rho - \sigma_l)} \mathfrak{M}_l} = 1 + 0(\sigma_l),$$

$$(k) \qquad \frac{\max\limits_{x \lessgtr \mathcal{E}} |X_n(x)\, s_l(x)|}{m_n[s_l(x)]} = 1 + 0(\sigma_l).$$

Existiert also eine unendliche Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$, für welche $\sigma_l \to 0$ (oder $\sigma_l = 0$), so weicht für diese Folge (vgl. § 2) das eben konstruierte Polynom $X_n(x)$ in bezug auf die Belegungsfunktion $s_l(x)$ in $\mathcal{E}$ asymptotisch am wenigsten von Null ab.

§ **19. Konstruktion der Polynome** $Y_n(x)$. Es sei $x' = -x$, sodass der Punktmenge $\mathcal{E}$ der x — Ebene entspricht die Punktmenge $\mathcal{E}'$

$$\mathcal{E}': \qquad \langle -1, -\beta \rangle, \ \langle -\alpha, 1 \rangle$$

der x' — Ebene. Es sei ferner $a_\lambda' = -a_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ und

$$(a) \qquad s_l^{(1)}(x') = (x' - a_1')(x' - a_2') \ldots (x' - a_l') = (-1)^l s_l(x).$$

Bezeichnet $\mathcal{T}_n(x)$ das Tschebyscheffsche in $\mathcal{E}$ Polynom n-ten Grades in bezug auf die Belegungsfunktion $s_l(x)$ und hat $\mathcal{T}_n^{(1)}(x')$ dieselbe Bedeutung in bezug auf $\mathcal{E}'$ und $s_l^{(1)}(x')$, so ist offenbar

$$\mathcal{T}_n(x) = (-1)^n\, \mathcal{T}_n^{(1)}(x'),$$

(b)
$$m_n[s_l(x)] = m_n[s_l(x);\ \mathcal{E}] = \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |\mathcal{T}_n(x)\, s_l(x)| =$$
$$= \max_{x' \lessgtr \mathcal{E}'} |\mathcal{T}_n^{(1)}(x')\, s_l^{(1)}(x')| = m_n[s_l^{(1)}(x');\ \mathcal{E}'].$$

Nun stellen wir uns die Aufgabe, die Überlegungen des vorigen Paragraphen auf $\mathcal{E}'$ und $s_l^{(1)}(x')$ anstatt $\mathcal{E}$ und $s_l(x)$, anzuwenden. Wegen (1) bleibt der Modul $\varkappa$ ohne Änderung; nach (5 bis) treten dagegen anstatt

$$\rho,\ t_\lambda = r_\lambda + is_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots l),$$

die Grössen

$$\rho' = -K - \rho,$$

$$t_\lambda' = -K - t_\lambda;\ r_\lambda' = -K - r_\lambda,\ s_\lambda' = -s_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

ein, wobei auch σ_l durch

$$\sigma_l' = -K - \sigma_l$$

ersetzt werden muss. Wegen (39) ergibt sich die Gleichung

(39 bis) $$-(n+l)\rho' + r_1' + r_2' + \ldots + r_l' = p' K - \sigma_l',$$

wo

(c) $$p' = n - (p+1).$$

Setzt man noch

(42 bis) $$R_1' + R_2' + \ldots + R_l' = -D' = -D^{(1)}(k),$$

wo

$$R_\lambda' = -\mathcal{K} - R_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

so kann man den Gleichungen (49_1) und (49_2) entsprechend zwei Werte k_1 und k_2 des Moduls derart bestimmen, dass

$$k_1 < \varkappa < k_2$$

und

(d)
$$2sn^2\left[\frac{(n+l-p')\,\mathcal{K}_1 - D^{(1)}(k_1)}{n+l};\ k_1\right] - 1 = -\alpha,$$
$$1 - 2sn^2\left[\frac{p'\,\mathcal{K}_2 + D^{(1)}(k_2)}{n+l};k_2\right] = -\beta.$$

Wegen (c) können die Gleichungen (d) auch in der Gestalt

$$(53_1) \qquad 1 - 2sn^2\left[\frac{(p+1)\mathcal{K}_1 + D(k_1)}{n+l};\ k_1\right] = \alpha,$$

$$(53_2) \qquad 2sn^2\left[\frac{(n+l-p-1)\mathcal{K}_2 - D(k_2)}{n+l};\ k_2\right] - 1 = \beta$$

dargestellt werden.

Nun nehmen wir die Polynome

$$(-1)^n P_n(x';\ a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_l';\ p',\ k_1) = Y_n(x),$$

$$(-1)^n P_n(x';\ a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_l';\ p',\ k_2),$$

welche nach (47) und (a) auch in der Form

$$P_n(x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l;\ p+1,\ k_1) = Y_n(x),\ P_n(x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l;\ p+1,\ k_2)$$

geschrieben werden können.

Es ist leicht zu sehen, dass $(-1)^n Y_n(-x')$ in bezug auf $\mathcal{E}'$ und die Belegungsfunktion $s_l^{(1)}(x')$ dieselbe Rolle spielt, wie $X_n(x)$ (im § 18) in bezug auf $\mathcal{E}$ und die Belegungsfunktion $s_l(x)$. Daher gelten die Beziehungen

$$m_n[s_l^{(1)}(x');\ \mathcal{E}'] \leqslant \max_{x' \lessgtr \mathcal{E}'} |Y_n(-x')s_l^{(1)})| \leqslant |L_n^{(l)}(p',\ k_1)|[1+\varepsilon_n^{(1)}(k_1)],$$

$$|L_n^{(l)}(p',\ k_2)|\ [1-\varepsilon_n^{(1)}(k_2)] \leqslant m_n[s_l^{(1)}(x');\ \mathcal{E}'],$$

oder nach (b) und (c)

$$m_n[s_l(x)] \leqslant \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |Y_n(x)s_l(x)| \leqslant |L_n^{(l)}(p+1,\ k_1)|\ [1+\varepsilon_n^{(1)}(k_1)],$$

$$|L_n^{(l)}(p+1,\ k_2)|\ [1-\varepsilon_n^{(1)}(k_2)] \leqslant m_n[s_l(x)],$$

wobei für $n \to \infty$

$$\frac{L_n^{(l)}(p+1, k_1)}{2\tau^n \dfrac{\Theta(\rho+\sigma_l)}{\Theta(\rho-\sigma_l)}\mathfrak{M}_l} = 1 + 0(\sigma_l') = 1 + 0(K+\sigma_l),$$

$$\frac{L_n^{(l)}(p+1,\ k_2)}{2\tau^n \dfrac{\Theta(\rho+\sigma_l)}{\Theta(\rho-\sigma_l)}\mathfrak{M}_l} = 1 + 0(K+\sigma_l),$$

sodass für $n \to \infty$:

$$m_n[s_l(x)] = 2\tau^n \frac{\Theta(\rho + \sigma_l)}{\Theta(\rho - \sigma_l)} \mathfrak{M}_l [1 + 0(K + \sigma_l)],$$

$$\frac{\max\limits_{x \lessgtr \mathcal{E}} |Y_n(x) s_l(x)|}{m_n[s_l(x)]} = 1 + 0(K + \sigma_l).$$

Existiert also eine unendliche Exponentenfolge, für welche $\sigma_l \to -K$, so weicht für diese Folge (vgl. § 2) das eben konstruierte Polynom $Y_n(x)$ in bezug auf die Belegungsfunktion $s_l(x)$ in $\mathcal{E}$ asymptotisch am wenigsten von Null ab.

§ **20. Konstruktion der Polynome** $Z_n(x)$. Es sei

(54₁) $$R_n^{(l)}(x) = \pm \frac{M_n^{(l)}}{2} \{\Psi(u) + \Psi(-u)\},$$

wo

$$\Psi(u) =$$

(54₂) $$= (-1)^{l-j} \left[\frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}\right]^{n+l} \frac{\Theta(u+r_1)\ldots\Theta(u+r_j) H(u+t_{j+1})\ldots H(u+t_l)}{\Theta(u-r_1)\ldots\Theta(u-r_j) H(u-t_{j+1})\ldots H(u-t_l)} \frac{\Theta(u+\sigma_l)}{\Theta(u-\sigma_l)}$$

und x mit u vermöge (5) verbunden ist [dabei sind $\varkappa$, ρ und σ_l aus (1), (2) und (39) während $M_n^{(l)}$ aus (51) (das Vorzeichen einschliesslich) zu bestimmen].

Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$R_n^{(l)}(x) = \frac{x^{n+2l+1} + c_1 x^{n+2l} + \ldots + c_{n+2l+1}}{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_l)(x - \zeta_l)},$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_{n+2l+1}$ reell sind und

(a) $$\zeta_l = \alpha + \frac{1 - \alpha^2}{2sn^2(\sigma_l + iK') + \alpha - 1},$$

sodass für $-K < \sigma_l < 0$:

$$\alpha < \zeta_l < \beta$$

[besteht dabei noch die Ungleichung

(b) $$-K + \delta < \sigma_l < -\delta$$

mit einem positiven δ, so ist

$$\alpha + \eta_1 < \zeta_l < \beta - \eta_2,$$

wo

$$\eta_1 = \frac{\varkappa^2 (1-\alpha^2)\, sn^2 \delta}{1+\alpha+(1-\alpha)\, dn^2 \delta}, \quad \eta_2 = \frac{\varkappa^2 (1-\beta^2)\, sn^2 \delta}{1-\beta+(1+\beta)\, dn^2 \delta}\Big].$$

Errinert man an die fundamentalen Eigenschaften der Funktion $r(x)$ von § 5, deren Speziellfall $R_n^{(l)}(x)$ ist, wobei hier

$$\mathsf{M} = n+l, \ \mathsf{M}_0 = 0, \ \mathsf{N} = l+1, \ \mathsf{N}_0 = j+1,$$

so ergibt sich, dass der maximale in $\mathcal{E}$ absolute Betrag der Funktion $R_n^{(l)}(x)$ gleich $M_n^{(l)}$ ist, und dass $R_n^{(l)}(x)$ den Wert $M_n^{(l)}$ mit abwechselnden Vorzeichen in μ aufeinander folgenden Punkten des Intervalls $<-1, \alpha>$ und in ν solchen Punkten des Intervalls $<\beta, 1>$ annimmt, wobei

$$\mu+\nu \geqslant \mathsf{M}-\mathsf{N}+2 = n+1$$

und

$$R_n^{(l)}(\beta) = (-1)^{j+1} R_n^{(l)}(\alpha) = \pm M_n^{(l)} \quad (x_\mu = \alpha,\ x_{\mu+1} = \beta).$$

Nun kann man $R_n^{(l)}(x)$ in der Gestalt

(55)
$$R_n^{(l)}(x) = (x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p^n)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l) + \varphi_n(x) = \\ = Z_n(x)\cdot s_l(x) + \varphi_n(x)$$

darstellen, wo

(c)
$$\varphi_n(x) = s_l(x) \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{A_\lambda}{x-a_\lambda} + \frac{B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \ldots + B_l}{(x-a_1)\ldots(x-a_l)(x-\zeta_l)},$$

wodurch ein Polynom $Z_n(x)$ vom Grade n definiert wird [es ist leicht zu sehen, dass für $\sigma_l = 0$:

$$Z_n(x) = X_n(x)].$$

Bezeichnet $\omega(\sigma_l)$ die grösste unter den Zahlen

$$\frac{\Theta(\rho-\sigma_l)}{\Theta(\rho+\sigma_l)}, \quad \left|\frac{H(t_\lambda-\rho)}{H(t_\lambda+\rho)}\right| \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

(welche nach (10) und (11) alle kleiner als Eins sind), so folgt ebenso wie im § 18, dass für $n\to\infty$:

(d)
$$\varepsilon_n = \frac{\max\limits_{x \lesssim \mathcal{E}} |\varphi_n(x)|}{M_n^{(l)}} < n^2 \mathfrak{B}[\omega(\sigma_l)]^{n+l},$$

wo $\mathfrak{B}$ von n unabhängig ist.

Nimmt dabei n nur solche Werte an, für welche (b) erfüllt ist, wobei δ beliebig klein (aber von n unabhängig) sein kann, so gibt es eine von n unabhängende Zahl $\omega\,(0 < \omega < 1)$, welche die Grössen $\omega(\sigma_l)$ nicht übertreffen; falls n solche Werte durchläuft, so konvergiert offenbar die Grösse ε_n gegen Null für $n \rightarrow \infty$, und da nach dem Satze I (vgl. § 2):

$$M_n^{(l)}(1-\varepsilon_n) < \max_{x \lessgtr \mathcal{E}} |Z_n(x) s_l(x)| < M_n^{(l)}(1+\varepsilon_n),$$

$$M_n^{(l)}(1-\varepsilon_n) < m_n[s_l(x)] < M_n^{(l)}(1+\varepsilon_n),$$

so ergibt sich der folgende Schluss:

Existiert eine unendliche Folge $n_1, n_2, \ldots$, für welche die Ungleichung

$$\text{(b)} \qquad -K + \delta < \sigma_l < -\delta$$

mit einem beliebig kleinen aber festen $\delta > 0$ erfüllt ist, so weicht für diese Folge das Polynom $Z_n(x)$ in bezug auf die Belegungsfunktion $s_l(x)$ in $\mathcal{E}$ asymptotisch am wenigsten von Null ab; dabei bestehen die Ungleichungen:

$$\text{(f)} \qquad \begin{gathered} \frac{1-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} < \frac{\max\limits_{x \lessgtr \mathcal{E}} |Z_n(x) s_l(x)|}{m_n[s_l(x)]} < \frac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}, \\ 1-\varepsilon_n < \frac{2\tau^n \dfrac{\Theta(\rho+\sigma_l)}{\Theta(\rho-\sigma_l)} \mathfrak{M}_l}{m_n[s_l(x)]} < \frac{1}{1-\varepsilon_n}. \end{gathered}$$

§ 21. **Allgemeine Säfze über das asymptotische Verhalten der Grösse $m_n[s_l(x)]$.** Im vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, dass

$$\frac{m_n[s_l(x)]}{2\tau^n \dfrac{\Theta(\rho+\sigma_l)}{\Theta(\rho-\sigma_l)} \mathfrak{M}_l} \longrightarrow 1,$$

falls n derart ins Unendliche wächst, dass eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1^0, $\sigma_l = 0$,

2^0, $\sigma_l \rightarrow 0$,

3^0, $\sigma_l \rightarrow -K$,

4^0, $-K + \delta < \sigma_l < -\delta$.

Aus dem Hilfssatze II ergibt sich daher der

Satz VIII. Sind die Grössen $\varkappa$, ρ und σ_l bestimmt aus (1), (2) und (39), $\mathfrak{M}_l$ aus (52_2) und bezeichnet τ den transfiniten Durchmesser von $\mathcal{E}$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n[s_l(x)]}{2\tau^n \frac{\Theta(\rho+\sigma_l)}{\Theta(\rho-\sigma_l)} \mathfrak{M}_l} = 1. \tag{56}$$

Bezeichnet dabei $Q_n^{(l)}(x)$ dasjenige uuter den Polynomen $X_n(x)$, $Y_n(x)$, $Z_n(x)$, welches in $\mathcal{E}$ in bezug auf $s_l(x)$ am wenigsten von Null abweicht, so besteht für $n \to \infty$ die asymptotische Gleichung

$$\max_{x \prec \mathcal{E}} |Q_n^{(l)}(x) s_l(x)| \backsim m_n[s_l(x)].$$

Jetzt wollen wir den Ausdruck (52_2) für die nur von $\mathcal{E}$ und $s_l(x)$ abhängende Grösse $\mathfrak{M}_l$ einer wichtigen Transformation unterwerfen, aus welcher der ware Charakter dieser Grösse, als eines Funktionals von $s_l(x)$ besonders deutig einzusehen wird. Die Idee dieser Transformation gehört S. N. Bernstein,[16] welcher sie für denjenigen Fall ausgeführt hat, wo anstatt der Punktmenge $\mathcal{E}$ ein einziges Intervall vorgelegt war.

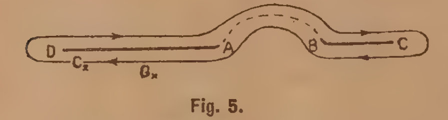


Fig. 5.

Wir verbinden dazu zunächst die Punkte $x=\alpha$ und $x=\beta$ der x-Ebene mit einem Kurvenbogon, auf welchem keiner der Punkte

$$a_1, a_2, \ldots, a_l$$

liegen soll. Die aus diesem Bogen und aus den Strecken —1, α und β, 1 bestehende Kurve wollen wir, als einen Schnitt in der x-Ebene betrachten, so dass jeder Punkt dieser Kurve einmal auf dem linken Ufer des Schnittes ein zweites Mal auf dem rechten Ufer erscheinen wird. Man kann diesen zweiuferigen Schnitt als eine einfache geschlossene Kurve C_x betrachten, welche in der x-Ebene ein unendliches einfach zusammenhängendes Gebiet G_x berandet (Fig. 5).

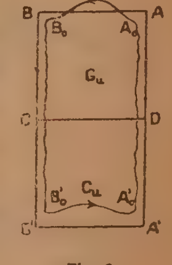


Fig. 6.

Der Kurve C_x und dem Gebiete G_x entsprechen vermöge der Abbildung (5) in der u-Ebene eine einfache geschlossene Kurve C_u und ein von ihr begrenztes Gebiet G_u (Fig. 6).

[16] S. Bernstein, Sur les polynômes orthogonaux relatifs á un segment fini (Journ. de Math., tome IX, fasc. II, 1930, pp. 127—177), vgl. SS. 144—145.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir das Kurvenintegral

(a) $$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_u} \frac{\Psi_l'(u)}{\Psi_l(u)} \log \left\{ \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{2\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)f(u)} \right\} du,$$

wo

$$\Psi_l(u) = s_l(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l), \quad f(u) = \frac{\alpha-1}{2} - x.$$

Beachtet man, dass

$$\lim_{u\to\rho} \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{2\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)f(u)} = 1$$

und dass

$$\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)f(u)}$$

in G_u niergends verschwindet, so ergibt sich, dass die Funktion

(b) $$\log \left\{ \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{2\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)f(u)} \right\}$$

in G_u eindeutig und regulär ist. Wir können und wollen dabei den Logarithmus derart definieren, dass die Funktion (b) für $u=\rho$ gleich Null sei.

Wendet man jetzt den Cauchyschen Residuensatz an, so ergibt sich, dass

(c) $$J = \sum_{\lambda=1}^{l} \log \left\{ \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{2\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \frac{H(\rho+t_\lambda)}{H(\rho-t_\lambda)f(t_\lambda)} \right\} =$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{l} \log \left\{ \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{2\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \frac{H(\rho+t_\lambda)}{H(\rho-t_\lambda)} \frac{1}{\frac{\alpha-1}{2} - a_\lambda} \right\}.$$

Beachtet man ferner, dass $\Psi_l(u)$ in G_u ebenso viele Pole wie Nullstellen hat und also dass nach einem Umlaufe des Randes C_u von G_u die Funktion

$$\log \Psi_l(u) . \log \left\{ \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{2\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)f(u)} \right\}$$

keine Änderung erfährt, so ergibt sich nach einer partiellen Integration, dass

(d) $$J = J_1 + J_2,$$

wo

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_u} \frac{f'(u)}{f(u)} \log \Psi_l(u)\, du,$$

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_u} \left\{\frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)}\right\} \log \Psi_l(u)\, du.$$

Nun ist aber

$$\text{(e)} \qquad J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_x} \log s_l(x) \frac{dx}{x - \frac{\alpha-1}{2}} = -\sum_{\lambda=1}^{l} \log\left(\frac{\alpha-1}{2} - a_\lambda\right),$$

sodass es nur J_2 zu berechnen bleibt.

Dazu bemerken wir, dass $\Psi_l(u)$ und nach (13) auch

$$\left\{\frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)}\right\}$$

die Perioden $2K$ und $2iK'$ haben. Daher ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A_0 B_0} \left\{\frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)}\right\} \log \Psi_l(u)\, du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{B'_0 A'_0} \left\{\frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)}\right\} \log \Psi_l(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i M \int\limits_{A_0 B_0} \left\{\frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)}\right\} du =$$

$$= M \log \left\{\frac{H(iK'-K+\rho)\, H(iK'-\rho)}{H(iK'-K-\rho)\, H(iK'+\rho)}\right\} = 2\pi i N,$$

wo M und N ganze Zahlen bedeuten.

Demnach ist

$$J_2 = -2\pi i N - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-iK'}^{iK'} \left\{\frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)}\right\} \log \Psi_l(u)\, du -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-K+iK'}^{-K-iK'} \left\{\frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)}\right\} \log \Psi_l(u)\, du.$$

Versteht man unter $\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}$, falls $x \lessgtr \mathcal{E}$, den positiven Wert der Wurzel und ist auch $\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)} > 0$, so folgt aus (9), dass in $<-1, \alpha>$:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}} = -\frac{2idu}{\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)}}$$

und in $<\beta, 1>$:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}} = \frac{2idu}{\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)}}.$$

Daher ist nach (13)

(f) $$J_2 = -2\pi iN - \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{\alpha} \log s_l(x) \frac{i(x-\gamma)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}} - $$
$$- \frac{1}{\pi i}\int_{\beta}^{1} \log s_l(x) \frac{-i(x-\gamma)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}.$$

Vereinigt man jetzt (c), (d), (e) und (f), so ergibt sich, dass

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \log \left\{ \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{2\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \frac{H(\rho+t_\lambda)}{H(\rho-t_\lambda)} \right\} =$$
$$= -2\pi iN - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\alpha} \log s_l(x) \frac{(x-\gamma)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{1} \log s_l(x) \frac{(x-\gamma)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}$$

und also nach der Definition (52_2) der Grösse $\mathfrak{M}_l$ ist:

$$\log \mathfrak{M}_l = \sum_{\lambda=1}^{l} \log \left\{ \frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1^2(0)}{2\Theta^2(\rho)\,\Theta_1^2(\rho)} \left| \frac{H(\rho+t_\lambda)}{H(\rho-t_\lambda)} \right| \right\} =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\alpha} \log |s_l(x)| \frac{(x-\gamma)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{1} \log |s_l(x)| \frac{(x-\gamma)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}.$$

Die Grösse γ liegt, wie wir wissen (§ 6), zwischen α und β; daher st $x-\gamma$ im ersten Integrale negativ und im zweiten positiv. Schreibt man also

$$\int_{\mathcal{E}} F(x)\,dx$$

anstatt

$$\int_{-1}^{\alpha} F(x)\,dx + \int_{\beta}^{1} F(x)\,dx,$$

so nimmt die von uns gewonnene Darstellung die Gestalt

$$\log \mathfrak{M}_l = \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{E}} \log|s_l(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}} \tag{57}$$

oder

$$\mathfrak{M}_l = e^{\frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{E}} \log|s_l(x)| \frac{|x-\gamma|\cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}} \tag{58}$$

Bemerkung. Für $\varkappa=0$, d. h. für $\alpha=\beta$, geht die Punktmenge $\mathcal{E}$ in die Strecke $-1, 1$ über, während γ den Wert α annimmt; daraus folgt, dass für $\varkappa=0$ die Formel (58) die Gestalt

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_l = e^{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \log|s_l(x)| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

annehmen wird. Dies ist gerade die Formel von S. N. Bernstein[16] für eine Strecke.

Satz IX. Ist die nur von $\mathcal{E}$ abhängende Zahl $-\frac{\rho}{K}=R$ irrational und ist

$$s_l(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_l)$$

eine reelle und in $\mathcal{E}$ nicht verschwindende ganze rationale Belegungsfunktion, so existiert für jede der Ungleichung

$$-K<\omega\leqslant 0$$

genügende Zahl ω eine solche unendliche Folge naturaler Zahlen

$$n_1, n_2, n_3, \ldots,$$

dass für $i \to \infty$

$$m_{n_i}[s_l(x)] \backsim 2\,\frac{\Theta(\rho+\omega)}{\Theta(\rho-\omega)}\,\tau^{n_i}\, e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{E}} \log|s_l(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}},$$

wo τ den transfiniten Durchmesser der Punktmenge $\mathcal{E}$ bezeichnet.

Ist dagegen die Zahl R rational und hat sie nach der Vereinfachung die Gestalt

$$R = \frac{P}{Q},$$

so existieren Q Zahlen: $\sigma_l^{(0)}, \sigma_l^{(1)}, \ldots, \sigma_l^{(Q-1)}$, welche den Ungleichungen

$$(59) \qquad -\frac{\mu+1}{Q} K < \sigma_l^{(\mu)} \leqslant -\frac{\mu}{Q} K \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, Q-1)$$

genügen und derart sämtlichen Restklassen nach dem Modul Q entsprechen, dass für jede aus allen nach dem Modul Q untereinander kongruenten Zahlen bestehende Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ eine der folgenden Q asymptotischen Beziehungen bestehen wird

$$m_n[s_l(x)] \backsim 2\,\frac{\Theta(\rho+\sigma_l^{(\mu)})}{\Theta(\rho-\sigma_l^{(\mu)})}\,\tau^n e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{E}} \log|s_l(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, Q-1)$$

Beweis. Zur Abkürzung der Schreibweise möge die Bezeichnung

$$S = \frac{r_1 + r_2 + \ldots r_l - l\rho}{K}$$

eingeführt werden.

Fall 1°. Es sei R irrational.

Nach dem Satze von P. Tschebyscheff[13] wissen wir, dass es in diesem Falle zwei unendliche Folgen naturaler Zahlen

$$p_1, p_2, p_3, \ldots; \quad n_1, n_2, n_3, \ldots$$

gibt, für welche

$$-\frac{2}{n} < p - Rn - S - \frac{\omega}{K} < 0.$$

Setzt man daher der Beziehung (39) gemäss $\sigma_l = K(p - Rn - S)$, so ergibt sich, dass für die Exponentenfolge $n_1, n_2, n_3, \ldots$:

$$\sigma_l \to \omega,$$

woraus der erste Teil des Satzes unmittelbar wegen (56) und (58) folgt.

Fall 2°. Es sei R rational und gleich $\frac{P}{Q}$.

In diesem Falle nimmt die Grösse σ_l nur Q verschiedene Werte an, welche offenbar in der Gestalt

$$\sigma_l^{(0)}, \quad \sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(0)} - \frac{K}{Q}, \quad \sigma_l^{(2)} = \sigma_l^{(0)} - \frac{2K}{Q}, \quad \ldots, \quad \sigma_l^{(Q-1)} = \sigma_l^{(0)} - \frac{(Q-1)K}{Q}$$

dargestellt werden können, wobei $-\frac{K}{Q} < \sigma_l^{(0)} \leqslant 0$, und welche eindeutig sämtlichen Restklassen nach dem Modul Q entsprechen.

Damit ist bewiesenauch der zweite Teil des Satzes.

Bemerkung. Für die Gültigkeit der Formel

$$m_n[s_l(x)] \sim 2\frac{\Theta(\rho+\sigma_l)}{\Theta(\rho-\sigma_l)}\tau^n e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{E}} \log|s_l(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}}$$

ist, offenbar, die früher gemachte Annahme, dass der höchste Koeffizient des Belegungspolynoms $s_l(x)$ gleich Eins sei, nicht notwendig.

In der Tat, bedeutet A irgend eine Konstante, so ist einerseits

$$m_n[As_l(x)] = |A| \cdot m_n[s_l(x)]$$

und anderseits

$$e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{E}} \log|As_l(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}} = |A| \cdot e^{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{E}} \log|s_l(x)| \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}},$$

da

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{|x-\gamma|\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}} = 1. \tag{60}$$

Den Beweis der Gleichung (60) (wo wie oben die Quadratwurzel positiv ist), welcher implizite in Formeln dieses Paragraphs enthalten ist, überlassen wir dem Leser.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ÜBER EIN INTEGRAL MIT BESSELSCHEN FUNKTIONEN

Von. V. IGNATOVSKIJ (W. v. Ignatowsky)

(*Présenté par* A. Krylov, *membre de l'Académie*)

§ 1. Allgemeine Beziehungen. — § 2. Der Fall $x=0$. — § 3. Weitere Untersuchungen bei speziellen Annahmen. — § 4. Der Fall z — gross und einige Beispiele.

§ 1. Allgemeine Beziehungen

Bei einer technischen Aufgabe wurde man zu folgendem Integral geführt:[1]

(1) $$A = \int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda r)\, e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, d\lambda}{\lambda^2-\delta^2}$$

Wir wollen nun (1) verallgemeinern und zwar,

(2) $$A_{\gamma,\nu}(r, z, k, \delta) = \int_0^\infty \frac{J_\gamma(\lambda r)\, \lambda^{2\nu} e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, d\lambda}{\lambda^\gamma(\lambda^2-\delta^2)}; \quad \gamma > -1$$

schreiben und im folgenden das Integral $A_{\gamma,\nu}(r, z, k, \delta)$, oder kürzer $A_{\gamma,\nu}$ untersuchen. Für $\gamma = 0$ und $\nu = 1/2$ geht (2) in (1) über.

Hierbei sollen r, k und z reelle Grössen sein und speziell für z soll gelten,

(3) $$z \geqq 0$$

Ausserdem bestimmt sich δ aus,

(4) $$J_\gamma(r\delta) = 0$$

ist also eine beliebige Wurzel (ausser der Nullwurzel) der Gleichung (4).

[1] Ist mir freundlichst telephonisch von Herrn W. I. Milinski mitgeteilt worden

Auf Grund der Produktdarstellung von $J_\gamma(x)$ ersehen wir,[1] dass der Integrand in (2) für $\lambda = \delta$ endlich bleibt [Siehe weiter (9)].

Wegen der unteren Grenze muss in (2) sein

$$\nu + {}^1/_2 > 0 \tag{5}$$

Im Falle des Gleichheitszeichens in (3), muss, wegen der oberen Grenze in (2) sein,

$$\gamma + {}^5/_2 - 2\nu > 0 \tag{6}$$

Ist $z > 0$ so fällt die Bedingung (6) weg.

Nun ist bekanntlich,

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 u J_\gamma(\alpha u) J_\gamma(\beta u)\, du = \tag{7}$$

$$= \alpha J_\gamma(\beta) J_{\gamma+1}(\alpha) - \beta J_\gamma(\alpha) J_{\gamma+1}(\beta); \quad \gamma > -1$$

Setzen wir hier $\alpha = \lambda r$ und $\beta = r\delta$ so folgt aus (7), wegen (4),

$$\frac{J_\gamma(\lambda r)}{\lambda^2 - \delta^2} = -\frac{r}{\delta J_{\gamma+1}(r\delta)} \int_0^1 u J_\gamma(\lambda r u) J_\gamma(r\delta u)\, du \tag{8}$$

Hieraus ergibt sich, in bekannter Weise, und wieder wegen (4),

$$\left\{\frac{J_\gamma(r\delta)}{\lambda^2 - \delta^2}\right\}_{\lambda=\delta} = \frac{rJ_\gamma'(r\delta)}{2\delta} = -\frac{rJ_{\gamma+1}(r\delta)}{2\delta} \tag{9}$$

Wodurch die oben erwähnte Endlichkeit des Integranden bewiesen ist.

Demnach erhalten wir statt (2),

$$A_{\gamma,\nu} = -\frac{rk^{2\nu+1-\gamma}}{\delta J_{\gamma+1}(r\delta)} \int_0^1 u J_\gamma(r\delta u) M_{\gamma,\nu}(u)\, du \tag{10}$$

mit,

$$M_{\gamma,\nu}(u) = \int_0^\infty \frac{J_\gamma(\rho t)\, t^{2\nu} e^{-z\sqrt{t^2-1}}\, dt}{t^\gamma} \tag{11}$$

[1] Siehe z. B. Nielsen, N. Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig, Teubner, 1904, S. 358.

wobei,

(12) $$x = kz; \quad \rho = kru$$

bedeuten.[1]

Aus (11) ergibt sich,

(13) $$M_{\gamma,\nu} = \int\limits_1^\infty \frac{J_\gamma(\rho t)\, t^{2\nu}\, e^{-x\sqrt{t^2-1}}\, dt}{t^\gamma} + \int\limits_0^1 \frac{J_\gamma(\rho t)\, t^{2\nu}\, e^{-ix\sqrt{1-t^2}}\, dt}{t^\gamma}$$

Anderseits haben wir,[2]

(14) $$\Gamma(\varepsilon+1)\left\{\frac{U_{\gamma,\varepsilon,\nu}}{\left(\frac{a}{2}\right)^\varepsilon}\right\}_{a=0} = \int\limits_1^\infty \frac{J_\gamma(\rho t)\, t^{2\nu}\, e^{-x\sqrt{t^2-1}}\, dt}{t^\gamma\sqrt{t^2-1}} -$$
$$-i\int\limits_0^1 \frac{J_\gamma(\rho t)\, t^{2\nu}\, e^{-ix\sqrt{1-t^2}}\, dt}{t^\gamma\sqrt{1-t^2}} = -i\int\limits_{1-i\infty}^1 \frac{e^{-ix\alpha}\, J_\gamma(\rho\sqrt{1-\alpha^2})\, d\alpha}{(\sqrt{1-\alpha^2})^{\gamma+1-2\nu}}$$

Deshalb

(15) $$M_{\gamma,\nu} = \frac{\partial N_{\gamma,\nu}}{\partial x}$$

mit,

(16) $$N_{\gamma,\nu} = i\int\limits_{1-i\infty}^1 \frac{e^{-ix\alpha}\, J_\gamma(\rho\sqrt{1-\alpha^2})\, d\alpha}{(\sqrt{1-\alpha^2})^{\gamma+1-2\nu}}$$

Nun ist,[3]

(17) $$N_{\gamma,\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\rho}{2}\right)^\gamma\left(\frac{2}{R}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu+{}^1/_2)}{\Gamma(\gamma+{}^1/_2-\nu)}\times$$
$$\times\sum_{\mu=0}^\infty\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\mu}\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^\mu\Gamma(\mu+\gamma+{}^1/_2-\nu)\, Q_{\mu+\nu}(R)}{\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1)}$$

[1] Der Übergang von (2) zu (10) ist mit einer Vertauschung der Integrationsfolge verbunden. Solange $x > 0$ sein wird, ist diese Vertauschung vollkommen legitim. Der Fall $x = 0$ wird im folgenden Paragraphen ausführlich behandelt werden.

[2] W. v. Ignatowsky. Untersuchungen einiger Integrale mit Besselschen Funktionen und ihre Anwendung auf Beugungserscheinungen und andere. Teil I: Untersuchungen der Integrale. Acad. Sci. de l'URSS. Trav. de l'Institut Phys.-Math. Stekloff, III, 1, 1933, Formel (1) u. (2) § 2 und (1) § 7.

[3] Ignatowsky, l. c., Formel (1) § 7.

wobei

$$R = \sqrt{x^2 + \rho^2} \tag{18}$$

bedeutet.

Dic Summe in (17) ist absolut und gleichmässig konvergent bei,[1]

$$\frac{\rho}{R} = \frac{ru}{\sqrt{z^2 + r^2 u^2}} \leqq 1 \tag{19}$$

welche Bedingung immer erfüllt sein wird.

Auf Grund von (10) und (15) ergibt sich deshalb,

$$A_{\gamma,\nu} = -\frac{rk^{2\nu+1-\gamma}}{\delta J_{\gamma+1}(\delta r)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 u J_\gamma(r\delta u) N_{\gamma\,\nu}\, du \tag{20}$$

oder, wegen (12), statt (20),

$$A_{\gamma,\nu} = -\frac{k^{2\nu-1-\gamma}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{kr} \rho J_\gamma\left(\frac{\delta\rho}{k}\right) N_{\gamma,\nu}\, d\rho \tag{21}$$

Wir führen nun die Bezeichnung:

$$F_{\gamma,\nu,n}(R) = \Gamma(\nu + {}^1/_2 + n) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\rho^{2\mu}\,\Gamma(\mu + \gamma + {}^1/_2 - \nu)}{2^\mu \mu!\,\Gamma(\mu + \gamma + 1 + n)} \frac{Q_{\mu+\nu+n}(R)}{R^{\mu+\nu+n}} \tag{22}$$

ein. Es folgt dann statt (21),

$$A_{\gamma,\nu} = -\frac{k^{2\nu-1-\gamma} \cdot 2^{\nu-\gamma}}{\delta r \sqrt{\pi}\, J_{\gamma+1}(r\delta)\,\Gamma(\gamma + {}^1/_2 - \nu)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{kr} \rho^{\gamma+1} J_\gamma\left(\frac{\delta\rho}{k}\right) F_{\gamma,\nu,0}\, d\rho \tag{23}$$

und allgemein wird sein,

$$\frac{\partial F_{\nu,\gamma,n}}{\partial \rho} = -\rho F_{\gamma,\nu,n+1} \tag{24}$$

Demnach,

$$\begin{aligned} \int_0^{kr} \rho^{\gamma+1} J_\gamma\left(\frac{\delta\rho}{k}\right) F_{\gamma,\nu,0}\, d\rho &= \frac{k}{\delta}(kr)^{\gamma+1} J_{\gamma+1}(r\delta) F_{\gamma,\nu,0}(R_0) + \\ &+ \frac{k}{\delta} \int_0^{kr} \rho^{\gamma+2} J_{\gamma+1}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right) F_{\gamma,\nu,1}\, d\rho \end{aligned} \tag{25}$$

[1] Ignatowsky, l. c., A. II.

mit

(26) $$R_0 = \sqrt{x^2 + k^2 r^2}$$

Auf Grund von (24) erhalten wir also aus (25), durch sukzessive partielle Integration,

(27) $$\int_0^{kr} \rho^{\gamma+1} J_\gamma\left(\frac{\delta\rho}{k}\right) F_{\gamma,\nu,0}\, d\rho = \frac{k}{\delta}(kr)^{\gamma+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k}{\delta}\right)^n (kr)^n J_{\gamma+n+1}(r\delta)\, F_{\gamma,\nu,n}(R_0)$$

Analog (17), ist die rechte Seite von (27) absolut und gleichmässig konvergent bei der Bedingung,

(28) $$\frac{kr}{R_0} = \frac{kr}{\sqrt{x^2+k^2r^2}} \leqq 1$$

welche auch immer erfüllt sein wird. Hieraus folgt die Richtigkeit von (27).

Hierbei haben wir die bekannte Formel

(29) $$\frac{\partial x^\nu C_\nu(\alpha x)}{\partial x} = \alpha x^\nu C_{\nu-1}(\alpha x)$$

berücksichtigt. Ausserdem wird sein,

(30) $$\frac{\partial x^{-\nu} C_\nu(\alpha x)}{\partial x} = -\frac{\alpha}{x^\nu} C_{\nu+1}(\alpha x)$$

wo C_ν eine beliebige Cylinderfunktion bedeutet.

Auf Grund von (27) und (30) erhalten wir demnach, entgültig, statt (23),

(31) $$A_{\gamma,\nu} = \frac{k^{2\nu+1-\gamma}}{\delta^2\sqrt{\pi}\, J_{\gamma+1}(r\delta)} \left(\frac{2}{R_0}\right)^\nu \left(\frac{kr}{2}\right)^\gamma \frac{x}{R_0\,\Gamma(\gamma+{}^1/_2-\nu)} \times$$
$$\times \sum_{n=\omega}^{\infty} \frac{(kr)^{2n}}{2^n} J_{\gamma+n+1}(r\delta)\,\Gamma(n+{}^1/_2+\nu)\left(\frac{2}{r\delta}\right)^n \times$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2\mu}\,\Gamma(\mu+\gamma+{}^1/_2-\nu)}{2^\mu\,\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1+n)} \cdot \frac{Q_{\mu+\nu+1+n}(R_0)}{R_0^{\mu+n}}$$

§ 2. Der Fall $x=0$

Bei $x=0$ d. h. $R_0=kr$ wird die letzte Summe in (31) § 1 divergent.[1] Wegen des Faktors x, strebt aber die rechte Seite von (31) § 1 zu einem Grenzwert, den wir jetzt bestimmen wollen.

Es ist allgemein,

$$Q_{\varepsilon+n}(x)=\frac{\pi}{2\sin\varepsilon\pi}\{e^{i\varepsilon\pi}J_{\varepsilon+n}(x)-(-1)^n J_{-\varepsilon-n}(x)\} \tag{1}$$

mit n — ganz positiv.

Der Teil von (31) § 1, welcher von $J_{\nu+1+\mu+n}(R_0)$ abhängt, verschwindet augenscheinlich für $x=0$. Wir brauchen deshalb nur den Teil zu betrachten, welcher von $J_{-\nu-1-\mu-n}(R_0)$ abhängen wird. Hierfür erhalten wir, falls wir ausserdem statt $J_{-\nu-1-\mu-n}(R_0)$ die entsprechende Reihe einsetzen,

$$\frac{\pi k^{2\nu+1-\gamma}}{2\delta^2\sqrt{\pi}\sin\nu\pi\, J_{\gamma+1}(r\delta)}\left(\frac{2}{R_0}\right)^{2\nu+1}\left(\frac{kr}{2}\right)^{\gamma}\frac{x}{R_0\Gamma(\gamma+{}^1/_2-\nu)}\times \tag{2}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{kr}{R^0}\right)^{2n}\left(\frac{2}{r\delta}\right)^n J_{n+\gamma+1}(r\delta)\Gamma(n+{}^1/_2+\nu)\times$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu\Gamma(\mu+\gamma+{}^1/_2-\nu)}{\mu!\,\Gamma(\mu+n+\gamma+1)}\left(\frac{kr}{R_0}\right)^{2\mu}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{R_0}{2}\right)^{2s}}{s!\,\Gamma(s-\gamma-\mu-n)}$$

Statt der beiden letzten Summen in (2) können wir schreiben,

$$-\frac{(-1)^n\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{R_0}{2}\right)^{2s}}{s!}\times \tag{3}$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n+\nu+1-s)\Gamma(\mu+\gamma+{}^1/_2-\nu)}{\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1+n)}\left(\frac{kr}{R_0}\right)^{2\mu}$$

Die zweite Summe hier ist, für $x=0$ und bei $s\geq 1$, immer konvergent. Also verschwindet der, diesem Fall entsprechende, Teil von (2) bei $x=0$. Wir brauchen deshalb (2) nur fur $s=0$ zu betrachten.

Hierfür ergibt sich aus (2), wegen (3) und unter Beachtung, dass

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n+\nu+1)\Gamma(\mu+\gamma+{}^1/_2-\nu)}{\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1+n)}\left(\frac{kr}{R_0}\right)^{2\mu}= \tag{4}$$

$$=\frac{R_0\Gamma(\gamma+{}^1/_2-\nu)\Gamma(n+1+\nu)}{x\Gamma(n+{}^1/_2+\nu)\Gamma(\gamma-\nu)}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n+{}^1/_2+\nu)\Gamma(\mu+\gamma-\nu)}{\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1+n)}\left(\frac{kr}{R_0}\right)^{2\mu}$$

[1] Ignatowsky, l. c., A. II.

sein wird,

$$(5)\qquad -\frac{k^{2\nu+1-\gamma}}{2\delta^2\sqrt{\pi}\,J_{\gamma+1}(r\delta)}\left(\frac{2}{R_0}\right)^{2\nu+1}\left(\frac{kr}{2}\right)^{\gamma}\frac{1}{\Gamma(\gamma-\nu)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{kr}{R_0}\right)^{2n}\left(\frac{2}{\delta r}\right)^{n}J_{n+\gamma+1}(r\delta)\,\Gamma(n+1+\nu)\times$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n+{}^1/_2+\nu)\,\Gamma(\mu+\gamma-\nu)}{\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1+n)}\left(\frac{kr}{R_0}\right)^{2\mu}$$

Hier können wir nun $x=0$ setzen und erhalten dann,[1]

$$(6)\qquad A_{\gamma,\nu}=-\frac{1}{2\delta^2\sqrt{\pi}\,J_{\gamma+1}(r\delta)\,\Gamma(\gamma-\nu)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\gamma-2\nu-1}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{r\delta}\right)^{n}J_{n+\gamma+1}(r\delta)\,\Gamma(n+1+\nu)\times$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n+{}^1/_2+\nu)\,\Gamma(\mu+\gamma-\nu)}{\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1+n)};\qquad x=0$$

Die letzte Summe hier ist aber immer konvergent und deshalb, nach der Summierung, statt (6),

$$(7)\qquad A_{\gamma,\nu}=-\frac{1}{2\delta^2\,\Gamma(\gamma+{}^1/_2-\nu)\,J_{\gamma+1}(r\delta)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\gamma-2\nu-1}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{r\delta}\right)^{n}J_{n+\gamma+1}(\delta r)\,\Gamma(n+{}^1/_2+\nu);\qquad x=0$$

Die Summe hier ist bei der Bedingung,

$$(8)\qquad \gamma+{}^1/_2-\nu>0$$

konvergent, aber wegen det Faktors $\Gamma(\gamma+{}^1/_2-\nu)$ im Nenner, können wir, falls z. B. in (8) das Gleichheitszeichen steht, über den Wert der rechten Seite von (7) vorläufig nichts aussagen.

[1] Im folgenden § geben wir eine viel einfachere Ableitung von (6) an.

Nun ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{r\delta}\right)^n J_{n+\gamma+1}(r\delta)\,\Gamma(n+{}^1/_2+\nu)=$$

(9) $$=\left(\frac{r\delta}{2}\right)^{\gamma+1}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(n+{}^1/_2+\nu)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{r\delta}{2}\right)^{2s}}{s!\,\Gamma(s+n+\gamma+2)}=$$

$$=\left(\frac{r\delta}{2}\right)^{\gamma+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{r\delta}{2}\right)^{2s}}{s!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+{}^1/_2+\nu)}{\Gamma(n+s+\gamma+2)}$$

Die letzte Summe hier ist gerade bei der Bedingung (8) konvergent. Wir nehmen diese Bedingung vorläufig an und erhalten dann statt (9),

(10) $$\left(\frac{r\delta}{2}\right)^{\gamma+1}\Gamma(\nu+{}^1/_2)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\,\Gamma(s+\gamma+{}^1/_2-\nu)}{s!\,\Gamma(s+\gamma+1)\,\Gamma(s+\gamma+{}^3/_2-\nu)}\left(\frac{r\delta}{2}\right)^{2s}=$$

$$=\frac{r\delta}{2}\Gamma(\nu+{}^1/_2)\,\Gamma(\gamma+{}^1/_2-\nu)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r\delta}{2}\right)^s J_{s+\gamma}(r\delta)}{\Gamma(s+\gamma+{}^3/_2-\nu)}$$

Wobei wir eine bekannte Reihenentwicklung angewandt haben.[1]

Demnach entgültig statt (7), unter Beachtung von (4) § 1,

(11) $$A^{!}_{\gamma,\nu}=-\frac{\Gamma(\nu+{}^1/_2)}{2J_{\gamma+1}(\delta r)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\gamma-2\nu+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\delta r}{2}\right)^s J_{s+\gamma+1}(\delta r)}{\Gamma(s+\gamma+{}^5/_2-\nu)};\quad x=0$$

was also vorläufig bei der Bedingung (8) gültig ist.

Nun können wir aber, auf Grund der analytischen Fortsetzung, (11) auch für andere Werte der Parameter γ und ν als gültig annehmen, aber unter Innehaltung der Bedingungen (5) und (6) § 1 und (15).

Wir können also jetzt statt (11) schreiben,

(12) $$\int_0^{\infty}\frac{J_\gamma(r\lambda)\,\lambda^{2\nu}\,d\lambda}{\lambda^\gamma(\lambda^2-\delta^2)}=-\frac{\Gamma(\nu+{}^1/_2)}{2J_{\gamma+1}(\delta r)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\gamma-2\nu+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\delta r}{2}\right)^s J_{s+\gamma+1}(\delta r)}{\Gamma(s+\gamma+{}^5/_2-\nu)}$$

[1] Siehe z. B. Ignatowsky, l. c., A. I. Formel (12).

mit den Bedingungen,

(13) $$\nu + {}^1/_2 > 0$$

und

(14) $$\gamma + {}^5/_2 - 2\nu > 0$$

wozu noch, wegen (2) und (7) § 1 die Bedingung

(15) $$\gamma > -1$$

hinzukommt.

In den nächsten Paragraphen werden wir Beispiele anführen, bei welchen die Bedingung (14), aber nicht (8), erfüllt ist und werden diese Beispiele auch auf eine andere Weise kontrollieren.

Wir wollen nun noch den Ausdruck (12) weiter transformieren.

Auf Grund der bekannten Formel,[1]

(16) $$\int \left(\frac{x}{2}\right)^{\rho-1} J_\varepsilon(x)\,dx = \Gamma\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+s} J_{s+\varepsilon}(x)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}+s+1\right)}$$

erhalten wir,

(17) $$\int u^{\gamma+1-2\nu} J_{\gamma+1}(\delta r u)\,du = u^{\gamma+2-2\nu} \frac{\Gamma(\gamma+{}^3/_2-\nu)}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta r u}{2}\right)^s J_{s+\gamma+1}(\delta r u)}{\Gamma(s+\gamma+{}^5/_2-\nu)}$$

Damit dies für $u=0$ verschwindet, muss $\gamma+{}^3/_2-\nu>0$ sein. Wir können deshalb statt (12) schreiben,

(18) $$\int_0^\infty \frac{J_\gamma(r\lambda)\,\lambda^{2\nu}\,d\lambda}{\lambda^\gamma(\lambda^2-\delta^2)} = -\frac{\Gamma(\nu+{}^1/_2)\left(\frac{r}{2}\right)^{\gamma-2\nu+1}}{J_{\gamma+1}(\delta r)\,\Gamma(\gamma+{}^3/_2-\nu)} \int_0^1 u^{\gamma+1-2\nu} J_{\gamma+1}(\delta r u)\,du$$

mit der Bedingung,

(19) $$\gamma + {}^3/_2 - \nu > 0$$

was, wegen (13), der Bedingung (14) nicht widerspricht.

[1] Nielsen, l. c., S. 97.

§ 3. Weitere Untersuchungen bei speziellen Annahmen

Zu allererst wollen wir den Fall $k=0$ betrachten. Wir haben allgemein,

(1) $$\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^{\varepsilon} Q_{\varepsilon}(ax)\right\}_{a=0} = -\frac{\Gamma(\varepsilon)}{2x^{\varepsilon}};\quad \varepsilon>0$$

Setzen wir deshalb in (31) § 1, $k=0$, so erhalten wir, unter Beachtung von (12) und (26) § 1 und hinterheriger Anwendung von (4) § 2,

(2) $$\int_0^{\infty}\frac{e^{-z\lambda}J_{\gamma}(\lambda r)\lambda^{2\nu}d\lambda}{\lambda^{\gamma}(\lambda^2-\delta^2)} = -\frac{1}{2\delta^2\sqrt{\pi}\,J_{\gamma+1}(r\delta)\,\Gamma(\gamma-\nu)}\left(\frac{2}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)^{2\nu+1}\left(\frac{r}{2}\right)^{\gamma}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}J_{n+\gamma+1}(\delta r)\,\Gamma(n+1+\nu)\left(\frac{2}{r\delta}\right)^{n}\left(\frac{r^2}{z^2+r^2}\right)^{n}\times$$
$$\times\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n+{}^1\!/_2+\nu)\,\Gamma(\mu+\gamma-\nu)}{\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1+n)}\left(\frac{r^2}{z^2+r^2}\right)^{\mu}$$

Machen wir nun hier $z=0$, so kommen wir zu dem Ausdruck (6) § 2. Denn es ist ja klar, dass für $z=0$, $A_{\gamma,\nu}$ von k nicht abhängen wird. Wir sind demnach auf eine viel einfachere Weise, als in § 2, zu dem Ausdruck (6) § 2 gekommen.[1]

Nun gehen wir zu dem Fall.

(3) $$\gamma+{}^1\!/_2-\nu=0$$

über. Deshalb, wegen (5) und (6) § 1,

(4) $$\gamma+1>0$$

und

(5) $$^3\!/_2-\gamma>0$$

Die Bedingung (15) § 2 ist schon in (4) enthalten. Wir können (4) und (5) zu einer Bedingung

(6) $$^3\!/_2>\gamma>-1$$

zusammenfassen und ν bestimmt sich aus (3).

[1] Am Schluss des § 4 meiner zitierten Arbeit, habe ich auf einen ähnlichen Uebergang zu $x=0$, hingewiesen, welcher nach dem Muster des hiesigen § 2 ausgeführt gedacht ist. Da aber hier dieser Uebergang durchgerechnet ist, so kann dieses als eine Ergänzug zu § 4 meiner Arbeit betrachtet werden. Die Methode des § 3 hier, entspricht dem § 17 meiner zitierten Arbeit.

Dies alles gilt solange wir auch $z = 0$ berücksichtigen wollen. Für $z > 0$ kommen nur (3) und (4) in Betracht.

Aus (17) § 1 fliesst nun,

$$N_{\gamma,\gamma+1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{\gamma}\left(\frac{2}{R}\right)^{\gamma+1/2} Q_{\gamma+1/2}(R) \tag{7}$$

und deshalb aus (21) § 1,

$$A_{\gamma,\gamma+1/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k^{\gamma}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{kr}\rho^{\gamma+1} J_{\gamma}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+1/2}(R)}{R^{\gamma+1/2}}\,d\rho \tag{8}$$

oder wegen (30) § 1

$$A_{\gamma,\gamma+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x k^{\gamma}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)}\int_0^{kr}\rho^{\gamma+1} J_{\gamma}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+3/2}(R)}{R^{\gamma+3/2}}\,d\rho \tag{9}$$

Hieraus folgt durch partielle Integration, analog (25) § 1, auf Grund von (29) und (30) § 1,

$$\begin{aligned} A_{\gamma,\gamma+1/2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x k^{\gamma+1}(kr)^{\gamma+1}}{r\delta^2}\frac{Q_{\gamma+3/2}(R_0)}{R_0^{\gamma+3/2}} + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x k^{\gamma+1}}{r\delta^2 J_{\gamma+1}(r\delta)}\int_0^{kr}\rho^{\gamma+2} J_{\gamma+1}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+5/2}(R)}{R^{\gamma+5/2}}\,d\rho \end{aligned} \tag{10}$$

Anderseits können wir statt (9) auch schreiben,

$$A_{\gamma,\gamma+1/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x k^{\gamma}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)}\int_0^{kr}\rho^{\gamma} J_{\gamma}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{Q_{\gamma+1/2}(R)}{R^{\gamma+1/2}}\right)d\rho \tag{11}$$

und hieraus, wieder durch partielle Integration, unter Beachtung von (4) § 1.

$$A_{\gamma,\gamma+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x k^{\gamma-1}}{r J_{\gamma+1}(r\delta)}\int_0^{kr}\rho^{\gamma} J_{\gamma-1}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+1/2}(R)}{R^{\gamma+1/2}}\,d\rho\,; \quad \gamma > 0 \tag{12}$$

und

$$A_{0,1/2} = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\frac{Q_{1/2}(x)}{r\delta J_1(\delta r)} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{kr J_1(\delta r)}\int_0^{kr} J_1\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{1/2}(R)}{R^{1/2}}\,d\rho \tag{13}$$

Wegen (3) können wir jetzt (18) § 2 an Stelle von (12) § 2 gebrauchen und ersehen, dass dann der Integrand rechterseits ein vollständiges Differential sein wird. Deshalb ergibt sich, wieder wegen (4) § 1.

$$A_{\gamma,\gamma+1/2} = -\frac{\delta^{\gamma}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)}; \quad x = 0 \tag{14}$$

wobei jetzt die Bedingung (6) eingehalten werden muss.

Jetzt gehen wir zu dem Fall,

$$\gamma + 3/2 - \nu = 0 \tag{15}$$

über. Laut (15) § 2 wird sein,

$$\gamma + 1 > 0 \tag{16}$$

Die Bedingung (5) § 1 d. h. $\gamma + 2 > 0$, ist schon in (16) enthalten‘ und aus (6) § 1 folgt,

$$-1/2 - \gamma > 0 \tag{17}$$

oder zusammen mit (16),

$$-1/2 > \gamma > -1 \tag{18}$$

bei $z = 0$. Ist $z > 0$, so kommt nur (16) in Betracht.

Aus (17) § 1 ergibt sich ferner,

$$N_{\gamma,\gamma+3/2} = 2(\gamma+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\rho^{\gamma}\frac{Q_{\gamma+3/2}(R)}{R^{\gamma+3/2}} - \rho^{\gamma+2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Q_{\gamma+5/2}(R)}{R^{\gamma+5/2}} \tag{19}$$

und deshalb aus (21) § 1,

$$\begin{aligned} A_{\gamma,\gamma+3/2} = {} & 2x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\gamma+1)k^{\gamma+2}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)}\int_0^{kr}\rho^{\gamma+1}J_{\gamma}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+5/2}(R)}{R^{\gamma+5/2}}\,d\rho - \\ & - x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k^{\gamma+2}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)}\int_0^{kr}\rho^{\gamma+3}J_{\gamma}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+7/2}(R)}{R^{\gamma+7/2}}\,d\rho \end{aligned} \tag{20}$$

oder nach partieller Integration des ersten Gliedes,

$$A_{\gamma,\gamma+3/_2} = 2x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\gamma+1)\,k^{\gamma+3}(kr)^{\gamma+1}}{r\delta^2}\frac{Q_{\gamma+5/_2}(R_0)}{R_0^{\gamma+5/_2}} +$$

(21) $$+\,2x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\gamma+1)\,k^{\gamma+3}}{r\delta^2 J_{\gamma+1}(r\delta)}\int\limits_0^{kr}\rho^{\gamma+2}J_{\gamma+1}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+7/_2}(R)}{R^{\gamma+7/_2}}\,d\rho\,-$$

$$-\,x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{k^{\gamma+2}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)}\int\limits_0^{kr}\rho^{\gamma+3}J_{\gamma}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+7/_2}(R)}{R^{\gamma+7/_2}}\,d\rho$$

Nun ist,

(22) $$\frac{2\varepsilon J_{\varepsilon}(x)}{x} = J_{\varepsilon-1}(x) + J_{\varepsilon+1}(x)$$

Deshalb statt (21),

$$A_{\gamma,\gamma+3/_2} = 2x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\gamma+1)\,k^{\gamma+3}(kr)^{\gamma+1}}{r\delta^2}\frac{Q_{\gamma+5/_2}(R_0)}{R_0^{\gamma+5/_2}} +$$

(23)

$$+\,x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k^{\gamma+2}}{r\delta J_{\gamma+1}(r\delta)}\int\limits_0^{kr}\rho^{\gamma+3}J_{\gamma+2}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right)\frac{Q_{\gamma+7/_2}(R)}{R^{\gamma+7/_2}}\,d\rho$$

Wegen (13) können wir für $z=0$, nur (12) § 2 gebrauchen und erhalten,

(24) $$A_{\gamma,\gamma+3/_2} = -\frac{\delta^{\gamma+1}}{rJ_{\gamma+1}(r\delta)};\quad x=0$$

auf Grund der bekannten Formel,

(25) $$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon+1)} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{s}J_{s+\varepsilon}(x)}{s!}$$

und unter Innehaltung der Bedingung (18).

§ 4. Der Fall z — gross und einige Beispiele

Bei z — gross kommen nur die Bedingungen,

(1) $$\gamma+1>0;\ \nu+{}^1/_2>0$$

in Frage und wir setzen deshalb,

(2) $$\nu = n + \gamma + {}^1/_2$$

mit n — ganz und nicht negativ.

Bei $n = 0$, resp. $n = 1$, kommen wir zu dem Fall (3), resp. zu dem Fall (15) § 3.

Aus (17) § 1 ergibt sich jetzt,

(3) $$N_{\gamma, n+\gamma+1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\gamma} \left(\frac{2}{R}\right)^{n+\gamma+1/2} n!\,\Gamma(n+\gamma+1) \times$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{(-1)^n \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\mu} \left(\frac{R}{2}\right)^{\mu} Q_{\mu+n+\gamma+1/2}(R)}{\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1)\,\Gamma(n+1-\mu)}$$

und deshalb aus (21) § 1,

(4) $$A_{\gamma, n+\gamma+1/2} = x\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!\,\Gamma(n+\gamma+1)\, 2^n k^{2n+\gamma}}{r\delta\, J_{\gamma+1}(r\delta)} \times$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{(-1)^{\mu}}{2^{\mu}\mu!\,\Gamma(\mu+\gamma+1)\,\Gamma(n+1-\mu)} \int_0^{kr} \rho^{2\mu+\gamma+1} J_{\gamma}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right) \frac{Q_{\mu+n+\gamma+3/2}(R)}{R^{\mu+n+\gamma+3/2}}\, d\rho$$

Ist nun z — gross, so gilt dasselbe auch für R, resp. R_0. Da nun n endlich ist, so können wir uns jetzt mit dem ersten Glied ($\mu = 0$) begnügen und erhalten dann,

(5) $$A_{\gamma, n+\gamma+1/2} = x\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n k^{2n+\gamma}\,\Gamma(n+\gamma+1)}{r\delta\Gamma(\gamma+1)\, J_{\gamma+1}(r\delta)} \times$$
$$\times \int_0^{kr} \rho^{\gamma+1} J_{\gamma}\left(\frac{\delta\rho}{k}\right) \frac{Q_{n+\gamma+3/2}(R)}{R^{n+\gamma+3/2}}\, d\rho; \quad R \to \infty$$

oder nach partieller Integration,

(6) $$A_{\gamma, n+\gamma+1/2} = x\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n (kr)^{\gamma+1} k^{2n+\gamma+1}\,\Gamma(n+\gamma+1)}{r\delta^2\,\Gamma(\gamma+1)} \frac{Q_{n+\gamma+3/2}(R_0)}{R_0^{\,n+\gamma+3/2}};$$
$$R_0 \to \infty$$

falls wir wieder das Integral vernachlässigen.

Nun wird sein,

(7) $$Q_{n+\gamma+3/2}(R_0) = -i^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2R_0}}\, e^{\frac{i\gamma\pi}{2}}\, e^{-iR_0}; \quad R_0 \to \infty$$

Deshalb statt (6),

(8) $$A_{\gamma, n+\gamma+1/2} = -\frac{i^{n+1}\, 2^n\, k^{2n+\gamma+1}\, (kr)^{\gamma+1}\, x e^{\frac{i\gamma\pi}{2}}\, e^{-iR_0}\, \Gamma(n+\gamma+1)}{r\delta^2\, \Gamma(\gamma+1)\, R_0^{n+\gamma+2}}; \quad R_0 \to \infty$$

mit,

(9) $$R_0 = \sqrt{x^2 + k^2 r^2} = k\sqrt{z^2 + r^2}$$

Der Ausdruck (6) stimmt mit dem ersten Glied von (10), resp. (23) § 3 überein.

Statt (8) können wir, wegen (9), entgültig schreiben,

(10) $$\int_0^\infty \frac{J_\gamma(\lambda r)\, \lambda^{2n+\gamma+1}\, e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}}}{\lambda^2 - \delta^2}\, d\lambda = -\frac{z\,(2ik)^{n+1}\, r^\gamma\, \Gamma(n+\gamma+1)\, e^{\frac{i\pi\gamma}{2}}\, e^{-ik\sqrt{z^2+r^2}}}{2\delta^2\, \Gamma(\gamma+1)\, (\sqrt{z^2+r^2})^{n+\gamma+2}};$$

$$z \to \infty. \quad \gamma > -1$$

Hierbei müssen wir beachten, dass δ und r durch (4) § 1 verbunden sind.

Wir müssen noch den Fall $k=0$ und $z \to \infty$ untersuchen. Aus (4) folgt nun, auf Grund von (1) § 3,

(11) $$A_{\gamma, n+\gamma+1/2} = -\frac{z\, 2^{2n+\gamma+1}\, n!\, \Gamma(n+\gamma+1)}{r\delta\sqrt{\pi}\, J_{\gamma+1}(r\delta)} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{(-1)^\mu\, \Gamma(\mu+n+\gamma+3/2)}{\mu!\, \Gamma(\mu+\gamma+1)\, \Gamma(n+1-\mu)} \int_0^r \frac{u^{2\mu+\gamma+1}\, J_\gamma(\delta u)\, du}{(z^2+r^2u^2)^{\mu+n+\gamma+3/2}}$$

Auch hier wollen wir bei $z \to \infty$ nur das Glied mit $\mu = 0$ berücksichtigen und deshalb aus (11),

(12) $$A_{\gamma, n+\gamma+1/2} = -\frac{z\, 2^{2n+\gamma+1}\, \Gamma(n+\gamma+1)\, \Gamma(n+\gamma+3/2)}{r\delta\sqrt{\pi}\, \Gamma(\gamma+1)\, J_{\gamma+1}(r\delta)} \times$$

$$\times \int_0^r \frac{u^{\gamma+1}\, J_\gamma(\delta u)\, du}{(z^2+r^2u^2)^{n+\gamma+3/2}}; \quad z \to \infty$$

oder nach partieller Integration, entgültig,

$$(13)\quad A_{\gamma, n+\gamma+1/2} = -\frac{zr^{\gamma}\, 2^{2n+\gamma+1}\, \Gamma(n+\gamma+1)\, \Gamma(n+\gamma+3/2)}{\delta^2 \sqrt{\pi}\, \Gamma(\gamma+1)\, (z^2+r^2)^{n+\gamma+3/2}}; \qquad \underset{k=0}{z \to \infty} \quad \gamma > -1$$

falls wir wieder das Integral vernachlässigen.

Nun gehen wir zu $x = 0$ über.

Wir setzen $\gamma = -1/2$ und $\nu = 0$. Es wird (3) § 3 erfüllt sein und aus (14) § 3 folgt,

$$(14)\quad \int_0^\infty \frac{J_{-1/2}(\lambda r)\, \lambda^{1/2}\, d\lambda}{\lambda^2 - \delta^2} = -\frac{1}{r\delta^{3/2} J_{1/2}(r\delta)}$$

oder,

$$(15)\quad \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda r)\, d\lambda}{\lambda^2 - \delta^2} = -\frac{\pi}{2\delta \sin r\delta}$$

Da hier aber, wegen (4) § 1,

$$(16)\quad \delta = \frac{\pi}{r}(n+1/2); \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

sein wird, so folgt statt (15),

$$(17)\quad \int_0^\infty \frac{\cos \lambda d\lambda}{\lambda^2 - \pi^2 (n+1/2)^2} = -\frac{(-1)^n}{2n+1}; \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Wir machen jetzt $\gamma = 1/2$ und $\nu = 1$ und erhalten dann aus (17) oder (14) § 3,

$$(18)\quad \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \delta\, d\lambda}{\lambda^2 - \pi^2 (n+1)^2} = -\frac{(-1)^n \pi}{2}; \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

da hier

$$(19)\quad \delta = \frac{\pi}{r}(n+1); \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

sein wird. Nun setzen wir $\gamma = 0$ und $\nu = 1/2$. Aus (14) § 3 folgt dann,

$$(20)\quad \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\, \lambda d\lambda}{\lambda^2 - \delta^2} = -\frac{1}{r\delta J_1(r\delta)}$$

Die beiden letzten Fälle genügen ebenfalls der Bedingung (3) § 3.

Endlich wollen wir $\gamma = -{}^3/_4$ und $\nu = {}^3/_4$ annehmen. Das entspricht dem Fall (15) § 3, genügt aber der Bedingung (18) § 3.

Aus (24) § 3 ergibt sich hierbei,

(21) $$\int_0^\infty \frac{J_{-3/4}(\lambda r)\,\lambda^{9/4}\,d\lambda}{\lambda^2-\delta^2} = -\frac{\delta^{1/4}}{rJ_{1/4}(r\delta)}$$

Nun haben wir nach bekannten Formeln,[1]

(22) $$-Y_1(x)\,J_0(x)+Y_0(x)\,J_1(x)=\frac{2}{\pi x}$$

und

(23) $$J_{-3/4}(x)\,J_{-1/4}(x)+J_{1/4}(x)\,J_{3/4}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi x}$$

Beachten wir nun, dass die ersten Glieder, linkerseits in (22) und (23), wegen (4) § 1 verschwinden bei $x=r\delta$, so können wir deshalb, statt (20) und (21) auch schreiben,

(24) $$\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\,\lambda d\lambda}{\lambda^2-\delta^2} = -\frac{\pi}{2}\,Y_0(r\delta)$$

und

(25) $$\int_0^\infty \frac{J_{-3/4}(\lambda r)\,\lambda^{9/4}\,d\lambda}{\lambda^2-\delta^2} = -\frac{\pi\delta^{5/4}}{\sqrt{2}}\,J_{3/4}(r\delta)$$

Die obigen Beispiele für $x=0$, genügen alle der Bedingung (3), oder (15) § 3. Wiedersprechen also der Bedingung (8) § 2. Dafür sind sie aber alle im Einklang mit (14) § 2.

Deshalb und wegen dem nach (11) § 2 Gesagtem ist es wichtig, diese Beispiele auch auf einem anderen Weg direkt nachzuweisen.

Zunächst ersehen wir, da

(26) $$Q_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-ix}$$

sein wird, dass das zweite Glied in (13) § 3 für $x=0$, verschwindet. Das erste Glied ergibt uns dann den Wert (20).

[1] Nielsen, l. c., p. 23.

Ferner lassen sich (17), (18), (24) und (25) alle auch direkt auf Grund einiger Formeln von Watson,[1] ableiten.

Wegen den umständlichen, aber elementaren Rechnungen, begnügen wir uns hierbei mit diesem Hinweis.

Demnach haben wir also die Richtigkeit von (12) § 2, zusammen mit (14) § 2, an Beispielen gezeigt.

Leningrad, Dezember 1932.

В. С. ИГНАТОВСКИЙ. ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЕ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

РЕЗЮМЕ

Исследование одной технической задачи привело к интегралу (1) § 1 исследование которого еще усложняется тем, что величина δ определяется условием (4) § 1.

Я обобщил данный интеграл и привел его к виду (2) § 1, который и лег в основу настоящей работы. Исследование этого общего интеграла было возможно на основании результатов, полученных мною в моей работе, цитированной в § 1.

Были также исследованы случаи $k=0$, $z=0$ и $z \to \infty$. Последний при $k=0$ и $k \neq 0$.

Далее приведены примеры, которые, как это указано в конце § 4, можно вычислить совершенно другим путем, что служит контролем условия (14) § 2.

---

[1] G. N. Watson. A Treatise on the theory of Bessel funktions, Cambridge, 1922, S. 436, Formel (7) und die ihr vorhergehende.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ÜBER DIE GRENZWERTSÄTZE DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Von A. KOLMOGOROV (A. Kolmogoroff)

(Présenté par **S. Bernstein**, *membre de l'Académie)*

Die grundlegenden Gedanken von Laplace[1] und Tchebycheff[2] wurden bekanntlich nach den Arbeiten von Markoff[3] und Liapounoff[4] in dem sehr allgemeinen Satze (sog. Liapounoffscher Satz) über den Limes der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Summe einer grossen Anzahl von kleinen unabhängigen zufälligen Grössen zusammengefasst. Die Untersuchungen von Markoff[5] und S. Bernstein[6] zeigten nachher, dass ein analoger Satz in manchen Fällen auch für Summen nicht ganz unabhängiger Grössen gilt. Diese Verallgemeinerungen sind zwar von grosser Wichtigkeit für die Anwendungen, gehen jedoch prinzipiell nicht viel weiter: in allen von diesen Autoren untersuchten Fällen hängen nur die wenig entfernten Summanden stark voneinander ab, wenn man aber die Summe in genügend lange Partialsummen zerlegt, so werden dieselben fast unabhängig. Viel weiter geht die von S. Bernstein[6] zum erstenmal streng begründete zwei- (und mehr-) dimensionale Verallgemeinerung des Liapounoffschen Satzes auf den Fall von Summen zufälligen Vektoren.[6]

1 Laplace. Théorie analytique des probabilités.

2 Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. Oeuvres de Tchebycheff, **2**, SS. 481—491.

3 Vgl. А. Марков. Закон больших чисел и метод наименьших квадратов. Изв. Физ.-Мат. общ. при Казанском университете, **8** (1898).

4 Liapounoff. Sur une proposition de la théorie des probabilités, Bull. Acad. Sci., St.-Pétersb., **13** (1900), S. 359, и Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité, Mémoires Acad. Sci., St.-Pétersb., **12**.

5 А. Марков. Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин связанных в цепь. Зап. Акад. Наук, **22** (1910).

6 Vgl. Math. Ann., **97** (1926), S. 1—59.

Nach allen diesen Untersuchungen blieb noch — selbst im einfachsten Falle der unabhängigen Summanden — die Grenzwerte der verschiedenen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, welche mit dem ganzen Verlauf der Partial-summen einer Folge zufälliger Grössen verbunden sind. Zu diesem Gebiet gehören allerdings die alten Resultate von Laplace und Poisson[7] über die Wahrscheinlichkeiten der Ruin eines Spielers, welche neuerdings von P. Lévy fortgesetzt wurden.[8] Einen allgemeinen Satz dieser Art habe ich neuerdings publiziert.[9] Einige spezielle zweidimensionale Probleme analoger Art wurden inzwischen von Lüneburg untersucht.[10] In den beiden letzteren Arbeiten ist der Zusammenhang zwischen diesen Problemen und den Differentialgleichungen der Wärmeleitung klargelegt.[11]

In den letzten Monaten hat I. Petrovski in Moskau eine allgemeine Methode gefunden, welche in sehr allgemeinen Fällen sich auf Summen kleiner zufälligen Grössen beziehende wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme auf die entsprechenden Differentialgleichungen zurückführt. In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode auf den Beweis des Liapounoffschen Satzes (§ 1) und meines oben zitierten Satzes (§§ 2 und 3) angewandt. Die Anwendungen auf das Problem der Irrfahrt findet man in einer noch nicht erschienenen Abhandlung von Petrovski, welche die Fragestellungen von Lüneburg wesentlich verallgemeinert.

Die Methode gilt vermutlich auch, wenn das Verteilungsgesetz jedes Summanden x_{k+1} von der Summe $s_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ aller vorangehenden Summanden abhängt. Dieser Fall ist entscheidend für eine strenge mathematische Begründung der Diffusionstheorie, wenn die äusseren Kräfte, sowie die Diffusionskoeffizienten, Funktionen des Ortes sind. Man sollte in diesem Falle beweisen, dass die Verteilungsgesetze der Summen annähernd durch die entsprechenden Lösungen der Focker-Planckschen Differentialgleichung dargestellt werden können.[12]

[7] Laplace. Théorie analytique des probabilités.

[8] P. Lévy. Nuove formule relative al giuoco di testa e croce, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 2 (1931), p. 3.

[9] A. Kolmogorov (A. Kolmogoroff). Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes, Bull. Acad. Sci. URSS, 1931, S. 959.

[10] R. Lüneburg. Das Problem der Irrfahrt, Math. Ann., 104 (1931), S. 700.

[11] Vgl. auch R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy. Über die partiellen Differenzengleichungen, Math. Ann., 100 (1928), S. 32—74.

[12] A. Fokker. Ann. d. Phys., 43 (1914), S. 812; M. Planck. Berichte der Preuss. Acad., 10 Mai 1917, vgl. auch A. Kolmogoroff, Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104 (1931), S. 415, speziell §§ 12, 13, 14.

§ 1. Es seien

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

voneinander unabhängige zufällige Grössen mit den mathematischen Erwartungen

$$E(x_n) = 0, \quad E(x_k^2) = 2bk, \quad E(|x_k|^3) = d_k;$$

die Verhältnisse $d_k : b_k$ seien dabei ihrem Betrage nach sämtlich kleiner als eine feste Konstante

(1) $$\frac{dk}{b_k} \leqslant \mu.$$

Aus (1) folgt wegen der wohlbekannten Momentenungleichung $b_k^3 \leqslant d_k^2$

(2) $$b_k \leqslant \mu^2.$$

Man setze weiter

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = s_k, \quad s_n = S,$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k = t_k, \quad t_n = T.$$

Es sei jetzt T fest gewählt (n aber unbestimmt); der Liapounoffsche Satz behauptet dann, dass

(3) $$P(a < S < b) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \int_a^b e^{-\frac{s^2}{4T}} ds + \theta R(\mu), \ |\theta| \leqslant 1,$$

ist, wobei P die Wahrscheinlichkeit der eingeklammerten Ungleichung bedeutet und $R(\mu)$ mit μ gegen Null konvergiert.

Um das zu beweisen, betrachen wir die Wahrscheinlichkeit

$$P_k(s) = P(a < S - s_k + s < b)$$

dafür, dass in der Voraussetzung $s_k = s$ die Summe S zwischen a und b enthalten ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(a < S < b)$ fällt offensichtlich mit $P_0(0)$ zusammen. $P_k(s)$ genügt der Gleichung

(4) $$P_k(s) = \int P_{k+1}(s + x)\, dT_{k+1}(x), \ k = 0, 1, 2, \ldots n - 1,$$

wobei $T_{k+1}(x)$ die Verteilungsfunktion von x_{k+1} ist und das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ genommen ist.[13] Es gilt ausserdem

$$(5) \qquad \begin{cases} P_n(s) = 1, & \text{wenn } a < s < b, \\ P_n(s) = 0, & \text{wenn } s \leqslant a, \text{ oder } s \geqslant b \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Anfangsbedingungen (5) und die Gleichung (4) bestimmen $P_k(s)$ eindeutig für alle $k (0 \leqslant k \leqslant n)$.

Wir nennen $P_k^*(s)$ eine Oberfunktion, wenn die Ungleichungen

$$(6) \qquad P_k^*(s) \geqslant \int P_{k+1}^*(s+x)\, dT_{k+1}(x),$$

$$(7) \qquad P_n^*(s) \geqslant P_n(s)$$

erfüllt sind. Man überzeugt sich leicht, das dann die Ungleichung

$$(8) \qquad P_k^*(s) \geqslant P_k(s)$$

auch bei $k < n$ gültig bleibt. Analog definiert man die Unterfunktionen. Wir wollen jetzt eine Funktion $u^*(s, t)$ konstruieren, welche bei jedem genügend kleinen μ zu einer Oberfunktion

$$(9) \qquad P_k^*(s) = u^*(s, t_k)$$

führt.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir zuerst eine viermal stetig-differentierbare Funktion $v(s)$, welche der folgenden Ungleichungen genügt

$$(10) \qquad \begin{cases} v(s) = 0, & s \leqslant a - \varepsilon, \\ 0 \leqslant v(s) \leqslant 1, & a - \varepsilon \leqslant s \leqslant a, \\ v(s) = 1, & a \leqslant s \leqslant b, \\ 0 \leqslant v(s) \leqslant 1, & b \leqslant s \leqslant b + \varepsilon, \\ v(s) = 0, & b + \varepsilon \leqslant s. \end{cases}$$

[13] Man beweist die Formel (4) ganz analog zu der bekannten Formel für die Verteilungsfunktion der Summe von zwei unabhängigen Grössen; vgl. z. B. P. Lévy, Calcul des probabilités, p. 187.

Es sei jetzt

$$(11) \qquad \bar{u}(s, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}} \int v(s+x)\, e^{-\frac{x^2}{4(T-t)}} dx,$$

$$(12) \qquad u^*(s, t) = \bar{u}(s, t) + \varepsilon(T-t)$$

gesetzt. Dabei ist in (10) ebenso wie in (12) $\varepsilon > 0$. Die Funktion $\bar{u}(s, t)$ genügt (bei $t \leqslant T$) der Differentialgleichung

$$(13) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

und ihre Ableitungen bis zur vierten Ordnung nach s und bis zur zweiten Ordnung nach t sind beschränkt. Es sei M die obere Grenze dieser Ableitungen. Wenn man die Funktion $P_k^*(s)$ nach der Formel (9) bestimmt, erhält man

$$P_n^*(s) = u^*(s, T) = \bar{u}(s, T) = v(s) \geqslant P_n(s).$$

Die Bedingung (7) ist also erfüllt. Es genügt folglich (6) für genügend kleine μ zu beweisen. Man betrachtet zu diesem Zweck die Differenz

$$\Delta = P_k^*(s) - \int P_{k+1}^*(s+x)\, dT_{k+1}(x) = \varepsilon(T-t_k) + \bar{u}(s, t_k) -$$

$$-\varepsilon(T-t_{k+1}) - \int \bar{u}(s+x, t_{k+1})\, dT_{k+1}(x) = \varepsilon(t_{k+1}-t_k) +$$

$$(14) \qquad + \bar{u}(s, t_k) - \int \Big\{ \bar{u}(s, t_{k+1}) + \frac{\partial}{\partial s}\bar{u}(s, t_{k+1})\, x + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\bar{u}(s, t_{k+1}) \frac{x^2}{2} +$$

$$+ \theta M |x^3| \Big\}\, dT_{k+1}(x) = \varepsilon b_{k+1} + \bar{u}(s, t_k) - \bar{u}(s, t_{k+1}) -$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial s^2}\bar{u}(s, t_{k+1})\, b_{k+1} + \theta' M d_{k+1},$$

$$|\theta| \leqslant 1, \quad |\theta'| \leqslant 1.$$

Da aber

$$\bar{u}(s, t_k) - \bar{u}(s, t_{k+1}) = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(s_k, t_{k+1})(t_{k+1}-t_k) + \theta'' M (t_{k+1}-t_k)^2 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(s, t_{k+1})\, b_{k+1} + \theta''' M b_{k+1} \mu^2,$$

$$|\theta''| \leqslant 1, \quad |\theta'''| \leqslant 1,$$

ist, so folgt aus (14) unter Berücksichtigung von (1) und (13)

$$(15)\quad \begin{aligned} \Delta &= \varepsilon b_{k+1} + \left\{ -\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(s, t_{k+1}) - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\bar{u}(s, t_{k+1}) \right\} b_{k+1} + \theta^{IV} M b_{k+1} \mu + \\ &+ \theta''' M b_{k+1} \mu^2 = b_{k+1}(\varepsilon + \theta^{IV} M\mu + \theta''' M\mu^2), \quad |\theta^{IV}| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Aus (15) folgt unmittelbar, dass, wenn μ genügend klein ist,

$$\Delta \geqslant 0$$

wird, was die Bedingung (6) beweist. $P_k^*(s)$ ist also für ein hinveichend kleines μ eine Oberfunktion und es gilt die Ungleichung

$$(16)\quad \begin{aligned} P(a < s_n < b) &= P_0(0) \leqslant P_0^*(0) = u^*(0, 0) = \\ &= \varepsilon T + \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \int v(x) e^{-\frac{x^2}{4T}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{4T}} dx + R, \end{aligned}$$

wobei R bei geeigneter Wahl von ε beliebig klein wird. Die Heranziehung der Unterfunktionen ergibt die umgekehrte Ungleichung, so dass unsere Hauptformel (3) vollständig bewiesen ist.

§ **2.** Es seien jetzt $a(t)$ und $b(t)$ zwei viermal stetig differentierbare Funktionen von t, welche den Bedingungen

$$(17)\quad \begin{cases} a(t) < b(t) \\ a(0) < 0 < b(0) \end{cases}$$

genügen. Es wird gefragt, mit welcher Wahrscheinlichkeit P alle Ungleichungen

$$(18)\quad a(t_k) < s_k < b(t_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots n,$$

erfüllt werden.

Die Ungleichungen

$$(19)\quad \begin{cases} 0 \leqslant t < T \\ a(t) < s < b(t) \end{cases}$$

difinieren in der (s, t) — Ebene ein Gebiet G. Es sei $u(s, t)$ die begrenzte Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \tag{13}$$

in diesem Gebiet G mit den Randbedingungen

$$\begin{cases} u(s, T) = 1, & a(t) < s < b(t), \\ u\{s, a(t)\} = 0, & 0 \leqslant t < T, \\ u\{s, b(t)\} = 0, & 0 \leqslant t < T, \end{cases} \tag{20}$$

Unser Ziel ist zu beweisen, dass

$$P = u(0, 0) + \theta R(\mu), \quad |\theta| \leqslant 1, \tag{21}$$

ist, wobei $R(\mu)$ mit μ gegen Null konvergiert.

Wir betrachten zu diesem Zweck allgemeiner die Wahrscheinlichkeit $P_k(s)$ dafür, dass die Ungleichungen

$$a(t_i) < s_i - s_k + s < b(t_i) \tag{22}$$

für alle i, $k \leqslant i \leqslant n$ gelten. Die Gesuchte Wahrscheinlichkeit P ist gleich $P_0(0)$. Wenn

$$a(t_k) < s < b(t_k), \quad k < n, \tag{23}$$

ist, so genügt $P_k(s)$ derselben Gleichung

$$P_k(s) = \int P_{k+1}(s + x)\, dT_{k+1}(x), \tag{4}$$

wie im § 1. Statt der Bedingungen (5) erscheinen aber jetzt die folgenden:

$$\begin{cases} P_n(s) = 1, & \text{wenn} \quad a < s < b, \\ P_n(s) = 0, & \text{ween} \quad s \leqslant a(t_k), \quad \text{oder} \quad s \geqslant b(t_k) \quad \text{ist.} \end{cases} \tag{24}$$

Die Gleichungen (4) und (24) bestimmen $P_k(s)$ eindeutig für alle

$$k (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Wir nennen nun $P_k^*(s)$ eine Oberfunktion, wenn aus (23) die Ungleichung

$$P_k^*(s) \geqslant \int P_{k+1}^*(s+x)\, dT_{k+1}(x) \tag{25}$$

folgt und

$$\begin{cases} P_n^*(s) \geqslant 1, & \text{für} \quad a < s < b, \\ P_k^*(s) \geqslant 0, & \text{für} \quad s \leqslant a(t_k) \quad \text{bzw.} \quad s \geqslant b(t_k), \end{cases} \tag{26}$$

gilt. Man beweist wie im § 1, dass auch bei $k < n$

$$P_k^*(s) \geqslant P_k(s)$$

bleibt.

Um eine Oberfunktion zu konstruieren, brauchen wir die Funktion

$$\bar{u}(s, t),$$

welche als Lösung der Differentialgleichung (13) in dem Gebiet G durch die folgenden Randbedingungen definiert ist

$$\begin{cases} \bar{u}(s, t) = 1, & a < s < b, \\ \bar{u}\{a(t), t\} = f(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \bar{u}\{b(t), t\} = f(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{27}$$

wobei $f(t)$ eine viermal stetig differentierbare Funktion ist und den Bedingungen

$$\begin{cases} v(t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T - \varepsilon, \\ 0 \leqslant v(t) \leqslant 1, & T - \varepsilon \leqslant t \leqslant T, \\ v(T) = 1, \; v'(T) = v''(T) = 0 \end{cases} \tag{28}$$

genügt. Da $\bar{u}(s, t)$ (auch auf dem Rande von G) stetige Ableitungen nach s bis zur vierten Ordnung hat, so kann man ausserhalb von G diese Funktion so fortsetzen, dass die Ableitungen nach s bis zur vierten Ordnung in der ganzen (s, t) — Ebene beschränkt bleiben und immer

$$\bar{u}(s, t) > -\varepsilon \tag{29}$$

ist. Wir setzen jetzt

(30) $$u^*(s, t) = \bar{u}(s, t) + \varepsilon + \varepsilon(T - t),$$

(9) $$P_k^*(s) = u^*(s, t_k).$$

Der Beweis, dass $P_k^*(s)$ bei jedem genügend kleinen μ eine Oberfunktion ist, bleibt, abgesehen von einigen evidenten Abänderungen, dasselbe wie in § 1. Man erhält also für ein solches μ die Ungleichungen

$$P = P_0(0) \leqslant P_0^*(0) = u^*(0, 0).$$

$u^*(0, 0)$ konvergiert dabei mit $\varepsilon \to 0$ gegen $u(0, 0)$. Für den vollständigen Beweis der Formel (21) bleibt jetzt nur übrig die analogen Abschätzungen der Wahrscheinlichkeit P von unten zu geben, was man mit Hilfe von Unterfunktionen nach derselben Methode erreicht.

§ **3.** Es sei jetzt $P^{(1)}$ bzw. $P^{(2)}$ die Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines solchen k, dass

(31) $$\begin{cases} a(t_i) < s_i < b(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots k-1, \\ s_k \leqslant a(t_k), \end{cases}$$

bzw.

(32) $$\begin{cases} a(t_i) < s_i < b(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots k-1, \\ b(t_k) \leqslant s_k \end{cases}$$

gilt, und endlich $P(x, y)$ die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ungleichungen

(33) $$\begin{cases} a(t_k) < s_k < b(t_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots n-1, \\ x < s_n < y \end{cases}$$

erfüllt sind, wobei $a(T) \leqslant x < y \leqslant b(T)$ ist.

Es gelten dann die Limesrelationen

(34) $$P^{(1)} = u^{(1)}(0, 0) + \theta^{(1)} R^{(1)}(\mu), \quad |\theta^{(1)}| \leqslant 1,$$

(35) $$P^{(2)} = u^{(2)}(0, 0) + \theta^{(2)} R^{(2)}(\mu), \quad |\theta^{(2)}| \leqslant 1,$$

(36) $$P(x, y) = u_{x,y}(0, 0) + \theta R(\mu), \quad |\theta| \leqslant 1,$$

wobei $R^{(1)}(\mu)$, $R^{(2)}(\mu)$ und $R(\mu)$ mit μ gegen Null konvergieren und

$$u^{(1)}(s, t), \quad u^{(2)}(s, t) \quad \text{und} \quad u_{x,y}(s, t)$$

die begrenzten Lösungen der Differentialgleichung (13) sind, welche mittels folgender Randbedingungen bestimmt sind

$$(37)\quad \begin{cases} u^{(1)}(s, T) = 0, & a < s < b, \\ u^{(1)}\{a(t), t\} = 1, & 0 \leqslant t < T, \\ u^{(1)}\{b(t), t\} = 0, & 0 \leqslant t < T, \end{cases}$$

$$(38)\quad \begin{cases} u^{(2)}(s, T) = 0, & a < s < b \\ u^{(2)}\{a(t), t\} = 0, & 0 \leqslant t < T, \\ u^{(2)}\{b(t), t\} = 1, & 0 \leqslant t < T, \end{cases}$$

$$(39)\quad \begin{cases} u_{x,y}(s, T) = 0, & a < s < x, \\ u_{x,y}(s, T) = 1, & x < s < y, \\ u_{x,y}(s, T) = 0, & y < s < b, \\ u_{x,y}\{a(t), t\} = 0, & 0 \leqslant t < T, \\ u_{x,y}\{b(t), t\} = 0, & 0 \leqslant t < T. \end{cases}$$

Die Beweismethode bleibt dieselbe wie im § 2. In meiner oben zitierten Arbeit[14] sind für dieselben Grössen $u^{(1)}(0, 0)$, $u^{(2)}(0, 0)$ und $u_{x,y}(0, 0)$ andere Ausdrücke gegeben.[15]

Dniepropetrowsk, 8 VI 1932.

РЕЗЮМЕ

Настоящая статья «О предельных теоремах теории вероятностей» дает полное доказательство теорем, сообщенных в статье «Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes», напечатанной в Известиях Академии Наук СССР по Отд. мат. и естеств. наук за 1931 г. (стр. 959—962).

---

[14] Vgl. A. Kolmogorov (A. Kolmogoroff). Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes, Bull. Acad. Sci. URSS, 1931, S. 959.

[15] In meiner unter [9] u. [14] zitierten Arbeit ist die vierfache stetige Differentierbarkeit von $a(t)$ und $b(t)$ nicht vorausgesetzt. Wenn $a(t)$ und $b(t)$ nur einmal stetig differentierbar sind, so hätte man um den Beweis auch in diesem Falle vollständig durchzuführen diese Funktionen mit Hilfe viermal stetig differentierbaren Funktionen zu approximieren. Dass die Reste in den Formeln (3), (21), (34), (35) und (36) nach T gleichmässig klein sind, wenn nur T grösser als eine feste Konstante $T_0 > 0$ bleibt, beweist man ohne Schwierigkeit, wann man die zufällige Grösse x_k mit

$$\sqrt{T_0 : T}$$

multipliziert und also den allgemeinen Fall eines beliebigen T auf den Fall $T = T_0$ zurückführt. Eine weitere einfache Untersuchung zeigt, dass in den Formeln (34) und (35) die Reste auch ohne die Bedingung $T > T_0$ gleichmässig nach T mit μ gegen Null konvergieren.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, АРМИРОВАННОГО ПРОДОЛЬНЫМ КРУГОВЫМ СТЕРЖНЕМ

А. К. РУХАДЗЕ И И. Н. ВЕКУА

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**)

1. Настоящую работу, выполненную по предложению проф. Н. И. Мусхелишвили, следует рассматривать как дополнение к его статье «К задаче изгиба и кручения составных брусьев».[1]

Мы даем здесь полное решение задачи кручения бруса, состоящего из цилиндрической упругой массы, армированной продольным цилиндрическим стержнем, в предположении, что внешняя поверхность бруса и поверхность раздела стержня и окружающего материала — круговые цилиндры с параллельными (но вообще не совпадающими) осями.[2] Мы предполагаем, что оба материала спаяны между собой.

Полное (теоретическое) решение вопроса о кручении и изгибе составных брусьев в общем случае дано в упомянутой выше работе Н. И. Мусхелишвили.

Частный случай, который мы рассматриваем, представляет, как нам кажется, известный технический интерес, в виду чего мы решились опубликовать его.

При решении задачи мы пользуемся способом конформного отображения, также указанным (для случая однородных брусьев) упомянутым автором.[3]

[1] ИМЕН, 1932, № 7, стр. 907. См. еще N. Mouskhelichvili, Sur le problème de torsion des poutres élastiques composées, C. R. Acad. Sci., Paris, t. 194, p. 1435.

[2] Задача кручения кругового цилиндра, снабженного продольной полостью, ограниченной также круговым цилиндром, была решена Macdonald'ом (Proc. of the Cambridge Phil. Soc., vol. VIII, 1892—1895, Cambridge, 1895, p. 62) методом, совершенно отличным от применяемого нами и, по нашему мнению, гораздо более сложным. Из нашего решения можно сразу получить решение упомянутого автора, считая модуль сдвига стержня, равным нулю.

[3] N. Muschelisvili. Zu dem Problem der Torsion der homogenen isotropen Prismen. Изв. Политехн. инст. Грузии, вып. 1, Тифлис, 1929; он же, Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 6, vol. IX, 1929, p. 295.

Легко получить этим методом также решение задачи изгиба поперечной силой, на чем мы здесь пока не останавливаемся.

Вернемся к нашей задаче кручения. По предположению поперечное сечение S нашего бруса состоит из областей S_1 и S_2, где S_1 — поперечное сечение внутреннего цилиндра (стержня), а S_2 — кольцо между внутренним и внешним цилиндрами.

Пусть C_1 и C_2 окружности, ограничивающие S_1 и S_2, а r_1 и r_2 их радиусы, причем $r_1 < r_2$. Примем за плоскость xOy плоскость поперечного сечения и ось Oz направим параллельно осям цилиндров; тогда, как показано в упомянутой статье Н. И. Мусхелишвили, условиям задачи можно всегда удовлетворить, полагая (как это делает Saint-Venant для случая однородного бруса)

$$(1) \qquad u = -\tau zy, \quad v = \tau zx, \quad w = \tau \cdot \varphi(x, y),$$

где τ — постоянная (степень закручивания), а φ функция («функция кручения») — необходимо непрерывная[1] в области S.

Мы убедимся в этом также непосредственно, найдя фактическое решение для нашего частного случая.

Легко проверить, что все составляющие тензора напряжения равны нулю, кроме X_z и Y_z и что

$$(2) \qquad X_z = \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \quad Y_z = \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)$$

в области S_j $(j = 1, 2)$, обозначая через $\mu_j > 0$ значение модуля сдвига в области S_j.

Из уравнений упругого равновесия вытекает, что функция $\varphi(x, y)$ должна удовлетворять уравнению

$$(3) \qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

в каждой из областей S_j $(j = 1.2)$.

Обозначим для ясности через φ_1 и φ_2 значения функции φ в областях S_1 и S_2.

Мы имеем следующие контурные условия (см. названную выше первую статью Н. И. Мусхелишвили)

$$(4) \qquad \frac{d\varphi_2}{dn} = y\cos nx - x\cos ny \qquad (\text{на } C_2),$$

$$(5) \qquad \varphi_1 = \varphi_2 \qquad (\text{на } C_1),$$

[1] Это следует из непрерывности функции w.

$$\mu_2 \frac{d\varphi_2}{dn} - \mu_1 \frac{d\varphi_1}{dn} = (\mu_2 - \mu_1)(y \cos nx - x \cos ny) \qquad (\text{на } C_1), \tag{6}$$

где $\frac{d\varphi_2}{dn}$ и $\frac{d\varphi_1}{dn}$ обозначают производные, взятые по направлению нормали к контуру.

Из (6) вытекает, что нормальная производная от $\varphi(x, y)$ терпит разрыв при переходе через контур C_1.

Пусть $F(Z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ — функция комплексного переменного $Z = x + iy$, имеющая вещественной частью $\varphi(x, y)$, аналитическая в каждой из отдельно взятых областей S_1 и S_2. Ее значения в этих областях мы будем обозначать через $F_1(Z)$ и $F_2(Z)$.

Функции φ и ψ связаны условием Cauchy-Riemann'a, которое можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\psi}{ds},$$

где n — направление нормали, а s — направление касательной к любой линии (нормаль n направлена по отношению касательной так, как ось y-ов направлена по отношению оси x-ов).

Функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет, как легко видеть, условиям

$$\Delta\psi = 0 \qquad (\text{в областях } S_1, S_2), \tag{7}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const} \qquad (\text{на } C_2), \tag{8}$$

$$\frac{d\psi_2}{dn} = \frac{d\psi_1}{dn} \qquad (\text{на } C_1), \tag{9}$$

$$\mu_2\psi_2 - \mu_1\psi_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)(x^2 + y^2) + \text{const} \qquad (\text{на } C_1), \tag{10}$$

где ψ_1 и ψ_2 обозначают значения функции ψ, соответственно в областях S_1 и S_2.

2. Произведем замену переменных

$$Z = x + iy = \frac{\zeta}{1 - a\zeta} \quad (a > 0), \ \zeta = \xi + i\eta \tag{11}$$

Подобрав подходящим образом положительную величину a и две положительные величины ρ_1 и ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$, можем добиться того, чтобы окружности C_1 и C_2 на плоскости комплексной переменной Z перешли в концентрические окружности γ_1 и γ_2 на плоскости ζ с центром в точке $\zeta = 0$ и с радиусами ρ_1 и ρ_2.

Для этого величина a и точка $Z=0$ должны быть выбраны так, чтобы точки $Z=-\frac{1}{a}$ и $Z=0$ были сопряженными одновременно относительно окружностей C_1 и C_2'.

Принимая за ось Ox прямую, проходящую через центры окружностей C_1 и C_2, обозначая через l расстояние между этими центрами и через a' и $a''=a'+l$ — абсциссы их, путем элементарных выкладок получим

$$(12)\qquad a=\frac{l}{\sqrt{(r_2^2-r_1^2-l^2)^2-4r_1^2l^2}}=\frac{a'}{r_1^2-a'^2}=\frac{a''}{r_2^2-a''^2},$$

$$(13)\qquad a'=\frac{r_2^2-r_1^2-l^2-\sqrt{(r_2^2-r_1^2-l^2)^2-4r_1^2l^2}}{2l},$$

$$(14)\qquad \rho_1^2=\frac{a'}{a(1+aa')}<\frac{1}{a^2},\quad \rho_2^2=\frac{a''}{a(1+aa'')}<\frac{1}{a^2},$$

$$(14a)\qquad a'=\frac{a\rho_1^2}{1-a^2\rho_1^2},\quad a''=\frac{a\rho_2^2}{1-a^2\rho_2^2},$$

$$(15)\qquad r_1=\frac{\rho_1}{1-a^2\rho_1^2},\quad r_2=\frac{\rho_2}{1-a^2\rho_2^2}.$$

Отсюда вытекеет, что $\rho_1<r_1$ и $\rho_2<r_2$.

Далее будем иметь

$$(16)\qquad \alpha=\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}=\frac{r_2^2-r_1^2-l^2-\sqrt{(r_2^2-r_1^2-l^2)^2-4r_1^2r_2^2}}{r_2^2-r_1^2-l^2+\sqrt{(r_2^2-r_1^2-l^2)^2-4r_1^2r_2^2}}<1.$$

Введем обозначения

$$F(Z)=F\left(\frac{\zeta}{1-a\zeta}\right)=f(\zeta)=\varphi(\xi,\eta)+i\psi(\xi,\eta).$$

Функция $f(\zeta)$ разлагается в ряд Laurent'a в области σ_2 и в ряд Taylor'a в области σ_1, где σ_2 есть кольцо между γ_1 и γ_2, а σ_1 — площадь круга, имеющего окружностью γ_1.

Обозначая через $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ значения функции $f(\zeta)$ в σ_1 и σ_2, будем иметь

$$(17)\qquad f_2(\zeta)=a_0''+ib_0''+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(a_k''+ib_k'')\zeta^k,$$

$$(18)\qquad f_1(\zeta)=a_0'+ib_0'+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'+ib_k')\zeta^k.$$

Знак ($'$) над суммой означает, что k не принимает значения нуля.

Отсюда, полагая

$$\zeta = \rho e^{i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

получаем

$$(19)\quad \psi_2 = b_0'' + \sum_{k=1}^{\infty}(\rho^k a_k'' - \rho^{-k} a''_{-k})\sin k\vartheta + (\rho^k b_k'' + \rho^{-k} b''_{-k})\cos k\vartheta,$$

$$(20)\quad \psi_1 = b_0' + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(a_k'\sin k\vartheta + b_k'\cos k\vartheta).$$

Замечая, что [1]

$$(21)\quad \begin{aligned}\frac{1}{2}(x^2+y^2) &= \frac{1}{2}Z\cdot\bar{Z} = \frac{1}{2}\frac{\zeta}{1-a\zeta}\cdot\frac{\bar\zeta}{1-a\bar\zeta} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{(1-a\zeta)(1-a\bar\zeta)}, \quad (\rho^2 = \zeta\bar\zeta = \xi^2+\eta^2)\end{aligned}$$

и исходя из тождества, имеющего место при $|\zeta| < \frac{1}{a}$:

$$(22)\quad \begin{aligned}\frac{1-a^2\rho^2}{(1-a\zeta)(1-a\bar\zeta)} &= 1 + \frac{a\zeta}{1-a\zeta} + \frac{a\bar\zeta}{1-a\bar\zeta} = 1 + a\zeta + a^2\zeta^2 + \ldots + \\ &+ a^n\zeta^n + \ldots + a\bar\zeta + a^2\bar\zeta^2 + \ldots + a^n\bar\zeta^n + \ldots = \\ &= 1 + a(\zeta+\bar\zeta) + a^2(\zeta^2+\bar\zeta^2) + \ldots + a^n(\zeta^n+\bar\zeta^n) + \ldots = \\ &= 1 + 2a\rho\cos\vartheta + 2a^2\rho^2\cos 2\vartheta + \ldots + 2a^n\rho^n\cos n\vartheta + \ldots,\end{aligned}$$

контурные условия (8), (9) и (10) можно переписать в следующем виде:

$$(23)\quad \psi_2 = \frac{1}{2}\frac{\rho_2^2}{1-a^2\rho_2^2}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\rho_2^k\cos k\vartheta\right] + \text{const} \qquad (\text{на } \gamma_2),$$

$$(24)\quad \mu_2\psi_2 - \mu_1\psi_1 = \frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)\frac{\rho_1^2}{1-a^2\rho_1^2}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\rho_1^k\cos k\vartheta\right] + \text{const} \qquad (\text{на } \gamma_1),$$

$$(25)\quad \frac{d\psi_2}{d\rho} = \frac{d\psi_1}{d\rho} \qquad (\text{на } \gamma_1).$$

Из этих контурных условий получаем (при $k = 1, 2, 3\ldots$)

$$(26)\quad a_k' = a_k'' = a''_{-k} = 0,$$

[1] Через $\bar{Z}$, $\bar\zeta$ мы обозначаем величины, сопряженные с Z, ζ.

$$(27)\quad \begin{cases} \rho_2^{2k} b_k'' + b''_{-k} = a'' a^{k-1} \rho_2^{2k}, \\ \nu \rho_1^{2k} b_k'' + b''_{-k} = \nu a' a^{k-1} \rho_1^{2k}, \\ b_k' = b_k'' - \rho_1^{-2k} b''_{-k}, \end{cases}$$

где

$$\nu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}.$$

Величины a' и a'' имеют значения, определенные выше, см. формулы (14a).

Постоянные b_0'' и b_0' остаются произвольными, как и следовало ожидать, так как они никакого физического значения не имеют. Условие же непрерывности функции φ дает очевидно $a_0' = a_0''$; общее значение a_0' и a_0'' остается произвольным; это также понятно, так как оно может влиять только на жесткое смещение тела, как целого. В дальнейшем мы будем полагать $b_0' = b_0'' = a_0' = a_0'' = 0$.

Из формулы (27) вытекает, что

$$(28)\quad \begin{cases} b_k'' = \dfrac{a'' - \nu a' \alpha^k}{1 - \nu\alpha^k} a^{k-1} = a'' \cdot a^{k-1} + \dfrac{\nu l \alpha^k}{1 - \nu\alpha^k} a^{k-1}, \\ b''_{-k} = - l\nu \dfrac{\rho_1^{2k}}{1 - \nu\alpha^k} a^{k-1}, \\ b_k' = \dfrac{a'' + l\nu - a' \nu\alpha^k}{1 - \nu\alpha^k} a^{k-1} = a'' a^{k-1} + l\nu \dfrac{1 + \alpha^k}{1 - \nu\alpha^k} a^{k-1} \end{cases}$$

$$(k = 1, 2 \ldots).$$

Возвращаясь к формулам (17) и (18), на основании (28) получаем

$$(29)\quad f_2(\zeta) = i \frac{a''\zeta}{1 - a\zeta} + il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k a^{k-1} \zeta^k}{1 - \nu\alpha^k} - il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_1^{2k} a^{k-1}}{1 - \nu a^k} \cdot \frac{1}{\zeta^k},$$

$$(30)\quad f_1(\zeta) = i \frac{a''\zeta}{1 - a\zeta} + il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha^k}{1 - \nu\alpha^k} a^{k-1} \zeta^k.$$

Эти ряды и их производные, очевидно, абсолютно сходятся в соответствующих областях, включая и контуры.

Член $\dfrac{a''\zeta}{1 - a\zeta}$ дает функцию кручения однородного цилиндра ($\nu = 0$). Остальные члены в выражении для $f_2(\zeta)$ характеризуют «возмущение», вызванное присутствием стержня.

При малом ρ_1, пренебрегая членами выше второго порядка, имеем приближенно:

(31)
$$\frac{1}{i}f_2(\zeta)=\frac{a''\zeta}{1-a\zeta}+l\nu\frac{\alpha\zeta}{1-\nu\alpha}-l\nu\frac{\rho_1^2}{1-\nu\alpha}\cdot\frac{1}{\zeta}=$$
$$=\frac{a''\zeta}{1-a\zeta}+l\nu\alpha\zeta-l\nu\rho_1^2\cdot\frac{1}{\zeta},$$

(32)
$$\frac{1}{i}f_1(\zeta)=\frac{a''\zeta}{1-a\zeta}+l\nu(1+\alpha+\alpha\nu)\zeta.$$

Мы видим [из (31) и (32)], что значение возмущающих членов может быть порядка первой степени величины ρ_1 или r_1 вблизи стержня, когда $|\zeta|$ близко к ρ_1; на больших расстояниях от стержня эти возмущающие члены будут порядка ρ_1^2.

В старой переменной Z функция $F_1(Z)$ и $F_2(Z)$ в общем случае выражаются так:

(33)
$$\frac{1}{i}F_2(Z)=l\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k a^{k-1}Z^k}{(1-\nu\alpha^k)(1+aZ)^k}-$$
$$-l\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_1^{2k}a^{k-1}(1+aZ)^k}{(1-\nu\alpha^k)Z^k}+a''Z,$$

(34)
$$\frac{1}{i}F_1(Z)=l\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\alpha^k)a^{k-1}Z^k}{(1-\nu\alpha^k)(1+aZ)^k}+a''Z.$$

3. Перейдем к вычислению компонентов напряжения. Вместо того, чтобы возвращаться к старым переменным x, y удобнее с этой целью воспользоваться специальными криволинейными координатами, связанными с преобразованием (11).

Именно, точке $\zeta=\rho e^{i\vartheta}$ плоскости ζ соответствует, в силу этого преобразования, определенная точка $Z=\dfrac{\rho e^{i\vartheta}}{1-a\rho e^{i\vartheta}}$ плоскости Z. Таким образом, величины ρ и ϑ (полярные координаты точки ζ), могут быть рассматриваемы как криволинейные координаты точек плоскости Z. На плоскости Z линии $\vartheta=\text{const}$ и $\rho=\text{const}$ суть окружности; первые проходят через точки

$$Z=0,\ Z=-\frac{1}{a},$$

а вторые — к ним ортогональны.

Пусть (ρ) и (ϑ) обозначают нормали к этим окружностям, проходящим через данную точку, проведенные соответственно в сторону возрастаний ρ и ϑ, и пусть T_ρ, T_ϑ суть проекции на эти нормали вектора (X_z, Y_z).

Тогда, по формуле указанной Н. И. Мусхелишвили[1] (для случая однородных брусьев), мы для вычисления напряжений будем иметь формулу

$$T_{j\rho} - iT_{j\vartheta} = \mu_j \tau\zeta \frac{f_j'(\zeta) - i\overline{\omega}(\overline{\zeta})\,\omega'(\zeta)}{\rho\,|\omega'(\zeta)|} \qquad (j = 1, 2), \tag{35}$$

где значки j указывают область, к которой относится рассматриваемая точка.

Простое вычисление дает

$$|\omega'(\zeta)|^2 = \omega'(\zeta)\cdot\overline{\omega}'(\overline{\zeta}) = \frac{1}{(1-a\zeta)^2(1-a\overline{\zeta})^2},$$

откуда

$$|\omega'(\zeta)| = \frac{1}{(1-a\zeta)(1-a\overline{\zeta})} = \frac{1}{1-2a\rho\cos\vartheta + a^2\rho^2}, \tag{36}$$

после чего будем иметь

$$\zeta\frac{\overline{\omega}(\overline{\zeta})\cdot\omega'(\zeta)}{\rho\,|\omega'(\zeta)|} = \frac{\zeta\cdot\overline{\zeta}(1-a\zeta)(1-a\overline{\zeta})}{(1-a\overline{\zeta})(1-a\zeta)^2\rho} = \frac{\rho(1-a\overline{\zeta})}{1-2a\rho\cos\vartheta + a^2\rho^2}. \tag{37}$$

Возвращаясь к формуле (35), на основании (36) и (37) можем написать

$$\begin{aligned} T_{j\rho} - iT_{j\vartheta} = &-i\mu_j\tau\frac{\rho(1-a\overline{\zeta})}{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2} + \\ &+\mu_j\tau\frac{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2}{\rho}\zeta f_j'(\zeta) \qquad (j=1, 2). \end{aligned} \tag{38}$$

Из формул (17), (18) и (26) получаем

$$\zeta f_2'(\zeta) = i\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' k b_k'' \zeta^k, \tag{39}$$

$$\zeta f_1'(\zeta) = i\sum_{k=1}^{\infty} k b_k' \zeta^k; \tag{40}$$

знак ($'$) над суммой означает попрежнему, что k не принимает значения нуля.

[1] См. названные выше работы о кручении в Изв. Политехн. инст. Грузии, стр. 9, или в Rendiconti Lincei, p. 298.

Формулы (38) на основании (39) и (40) принимают вид

(41)
$$T_{2\rho} - iT_{2\vartheta} = -i\mu_2\tau\frac{\rho(1-a\bar{\zeta})}{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2} + \\ + i\mu_2\tau\frac{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2}{\rho}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' kb_k''\zeta^k,$$

(42)
$$T_{1\rho} - iT_{1\vartheta} = -i\mu_1\tau\frac{\rho(1-a\bar{\zeta})}{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2} + \\ + i\mu_1\tau\frac{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty} kb_k'\zeta^k.$$

Отделяя действительные и мнимые части в формулах (41) и (42), будем иметь

(43)
$$T_{2\rho} = \mu_2\tau\frac{\rho^2 a\sin\vartheta}{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2} - \\ - \mu_2\tau\frac{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(b_k''\rho^k + b''_{-k}\rho^{-k}\right)\sin k\vartheta,$$

(44)
$$T_{2\vartheta} = \mu_2\tau\frac{\rho(1-a\rho\cos\vartheta)}{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2} - \\ - \mu_2\tau\frac{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(b_k''\rho^k - b''_{-k}\rho^{-k}\right)\cos k\vartheta,$$

(45)
$$T_{1\rho} = \mu_1\tau\frac{\rho^2 a\sin\vartheta}{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2} - \\ - \mu_1\tau\frac{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty} kb_k'\rho^k\sin k\vartheta,$$

(46)
$$T_{1\vartheta} = \mu_1\tau\frac{\rho(1-a\rho\cos\vartheta)}{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2} - \\ - \mu_1\tau\frac{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty} kb_k'\rho^k\cos k\vartheta.$$

4. Жесткость при кручении определяется формулой[1]

$$(47)\qquad D=\mu_1\iint\limits_{S_1}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)dxdy+ \\ +\mu_2\iint\limits_{S_2}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dxdy.$$

Переходя к криволинейным интегралам по формуле Gauss'а и замечая, что $\varphi_1=\varphi_2$ на C_1, можем придать этой формуле вид:[2]

$$(48)\qquad D=-\mu_2\int\limits_{C_2}\varphi_2(xdx+ydy)+(\mu_2-\mu_1)\int\limits_{C_1}\varphi_1(xdx+ydy)+ \\ +\mu_1 I_1+\mu_2 I_2=-\frac{\mu_2}{2}\int\limits_{C_2}\varphi_2\, d(r^2)+\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\int\limits_{C_1}\varphi_1\, d(r^2)+\mu_1 I_1+\mu_2 I_2,$$

где $r^2=x^2+y^2$, а I_1 и I_2 суть моменты инерции площадей S_1 и S_2 относительно начала координат:

$$(49)\qquad I_1=\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)\,dxdy,\quad I_2=\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)\,dxdy.$$

Вводя переменную ζ соотношением $Z=\dfrac{\zeta}{1-a\zeta}$ мы будем иметь

$$(50)\qquad D=\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\int\limits_{\gamma_1}\varphi_1(\xi,\eta)\,d\frac{\zeta\bar\zeta}{(1-a\zeta)(1-a\bar\zeta)}- \\ -\frac{\mu_2}{2}\int\limits_{\gamma_2}\varphi_2(\xi,\eta)\,d\frac{\zeta\bar\zeta}{(1-a\zeta)(1-a\bar\zeta)}+\mu_1 I_1+\mu_2 I_2.$$

Формулы (17), (18) и (26) дают

$$(51)\qquad \varphi_2(\xi,\eta)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\rho^k b_k''-\rho^{-k}b''_{-k}\right)\sin k\vartheta+\mathrm{cost},$$

$$(52)\qquad \varphi_1(\xi,\eta)=-\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k b_k'\sin k\vartheta.$$

[1] См. напр. Love, Lehrbuch der Elastizitat (Deutsch. von A. Timpe), Leipzig, 1907, S. 363.

[2] Все нижеследующие криволинейные интегралы берутся в направлении, обратном вращению часовой стрелки.

Пользуясь формулами (22), (51) и (52), мы получим после элементарных выкладок

$$D = (\mu_2 - \mu_1)\pi a' \sum_{k=1}^{\infty} k a^{k-1} \rho_1^{2k} b_k' -$$

(53)

$$- \mu_2 \pi a'' \sum_{k=1}^{\infty} k a^{k-1} \rho_2^{k} (\rho_2^{k} b_k'' - \rho_2^{-k} b''_{-k}) + \mu_1 I_1 + \mu_2 I_2.$$

На основании формулы (28) мы можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a^{k-1} \rho_1^{2k} b_k' = a'' \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a^{2k-2} \rho_1^{2k} + \nu l \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1+\alpha^k}{1-\nu\alpha^k} a^{2k-2} \rho_1^{2k} =$$

$$= \frac{a'' \rho_1^2}{(1 - a^2 \rho_1^2)^2} + l\nu \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1+\alpha^k}{1-\nu\alpha^k} a^{2k-2} \rho_1^{2k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a^{k-1} \rho_2^{k} (\rho_2^{k} b_k'' - \rho_2^{-k} b''_{-k}) = a'' \sum_{k=1}^{\infty} k a^{2k-2} \rho_2^{2k} +$$

$$+ l\nu \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\alpha^k \rho_2^{k} + \rho_1^{2k}}{1-\nu\alpha^k} a^{2k-2} = \frac{a'' \rho_2^2}{(1 - a^2 \rho_2^2)^2} + 2l\nu \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho_1^{2k}}{1-\nu\alpha^k} a^{2k-2}.$$

Принимая во внимание, что

$$r_1^2 = \frac{\rho_1^2}{(1 - a^2 \rho_1^2)^2}, \quad r_2^2 = \frac{\rho_2^2}{(1 - a^2 \rho_2^2)^2},$$

получим

$$D = (\mu_2 - \mu_1)\pi a' a'' r_1^2 - \mu_2 \pi a''^2 r_2^2 + (\mu_2 - \mu_1)\pi a' l\nu \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1+\alpha^k}{1-\nu\alpha^k} a^{2k-2} \rho_1^{2k} -$$

(54)

$$- 2\mu_2 \pi a'' l\nu \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho_1^{2k}}{1-\nu\alpha^k} a^{2k-2} + \mu_1 I_1 + \mu_2 I_2.$$

Простым преобразованием последнее выражение представится в следующем виде:

(55) $$D = A - 2\mu_2 \pi l^2 \nu \rho_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k \nu^k}{(1 - a^2 \rho_1^2 \alpha^k)^2},$$

где, для краткости введено обозначение:

(55a) $$A = (\mu_2 - \mu_1)\pi a' a'^2 r_1^2 - \mu_2 \pi a''^2 r_2^2 - 2\mu_2 \pi l^2 r_1^2 \nu + \mu_1 I_1 + \mu_2 I_2.$$

Введем следующие величины: I — момент инерции сплошного круга радиуса r_2 относительно центра этого круга и I' — момент инерции круга радиуса r_1 относительно центра первого круга.

Таким образом

(56) $$I = \frac{\pi r_2^4}{2}, \quad I' = \frac{\pi r_1^4}{2} + \pi r_1^2 l^2.$$

Имеем, как известно

(57) $$I_1 = I' + \pi r_1^2 a'^2 - \pi r_1^2 l^2,$$

(58) $$I_2 = I + I' + \pi a''^2 r_2^2 - \pi a'^2 r_1^2 + \pi r_1^2 l^2.$$

Отсюда следует:

$$A = (\mu_2 - \mu_1)\pi a'^2 r_1^2 - \mu_2 \pi a''^2 r_2^2 - 2\mu_2 \pi l^2 r_1^2 \nu + \mu_1 I' +$$
$$+ \mu_1 \pi \cdot r_1^2 a'^2 - \mu_1 \pi r_1^2 l^2 + \mu_2 I - \mu_2 I' + \mu_2 \pi a''^2 r_2^2 - \mu_2 \pi a'^2 r_1^2 +$$
$$+ \mu_2 \pi r_1^2 l^2 = \mu_2 I + (\mu_1 - \mu_2) I' - \frac{\pi l^2 4^2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1 + \mu_2},$$

на основании чего окончательно получим из (55)

(59) $$D = \mu_2 I + (\mu_1 - \mu_2) I' - \frac{\pi l^2 r_1^2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1 + \mu_2} - $$
$$- 2\mu_2 \pi l^2 \nu \rho_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k \nu^k}{(1 - a^2 \rho_1^2 \alpha^k)^2}.$$

Обозначая через D' и D'' жесткости отдельно взятых однородного стержня и полого цилиндра (с модулями сдвига μ_1 и μ_2), на основании формулы (59) будем иметь (полагая последовательно $\mu_2 = 0$ и $\mu_1 = 0$):

(60) $$D' = \mu_1 I' - \mu_1 \pi l^2 r_1^2,$$

(61) $$D'' = \mu_2 (I - I') - \mu_2 \pi l^2 r_1^2 - 2\mu_2 \pi l^2 \rho_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(1 - a^2 \rho_1^2 \alpha^k)^2}.$$

Из формул (60), (61) и (59) следует

(62) $$D - (D' + D'') = \frac{4\pi \mu_1 \mu_2 l^2 r_1^2}{\mu_1 + \mu_2} + 2\mu_2 \pi l^2 \rho_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k (1 - \nu^{k+1})}{(1 - a^2 \rho_1^2 \alpha^k)^2},$$

т. е.

$$D' + D'' \leqslant D.$$

Для однородного цилиндра, когда $\mu_1 = \mu_2$ и $\nu = 0$, мы вместо D имели бы

$$D_0 = \mu_2 I. \tag{63}$$

В общем случае ($\mu_1 \neq \mu_2$) при малом r_1 имеем приближенно (пренебрегая четвертой и высшими степенями ρ_1)

$$D = A \text{ и } I' = \pi r_1^2 l^2,$$

откуда

$$D = \mu_2 I + \frac{2\mu_2(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2} I'. \tag{64}$$

Отсюда выводим приближенную формулу

$$\frac{D}{D_0} = 1 + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2} \frac{I'}{I}. \tag{65}$$

В случае полой эксцентрической трубы ($\mu_1 = 0$)

$$\frac{D}{D_0} = 1 - \frac{2I'}{I} = 1 - \frac{4r_1^2 l^2}{r_2^4}. \tag{66}$$

Эта формула совпадает с формулой, полученной Macdonald'ом в выше указанной его статье.

Если l также малая величина порядка r_1, последним членом правой части в ф-лах (65) и (66) можем пренебречь. В таком случае будем иметь

$$D = D_0; \tag{67}$$

значит, когда радиус стержня (или полости) и расстояние между осями стержня (или полости) и цилиндра малые величины одного и того же порядка, тогда жесткость при кручении армированного (или полого) цилиндра отличается от жесткости при кручении однородного цилиндра малой величиной четвертого порядка относительно упомянутых.

Если r_1 не малая величина, но расстояние между осями стержня и цилиндра настолько малая величина, что можно пренебречь ее квадратом, получим

$$D = \mu_2 I + (\mu_1 - \mu_2) I' = \frac{\pi\mu_2}{2}(r_2^4 - r_1^4) + \frac{\mu_1}{2}\pi r_1^4. \tag{68}$$

Таким образом, в случае малого l, жесткость при кручении составного бруса приближенно равна сумме жесткостей составных частей, как это легко было предвидеть заранее (при $l=0$ жесткость составного стержня в точности равна сумме жесткостей частей).

Если имеется несколько стержней из одного и того же материала, расположенных достаточно далеко друг от друга, для того, чтобы районы заметных возмущений, вызванных их присутствием, не покрывали друг друга, тогда формула (65) может быть применена и к этому случаю, если подразумевать под I' сумму моментов инерции их сечений относительно центра C_2.

23 VI 1932
Ленинград

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

NOTE SUR LES PHÉNOMÈNES D'ÉLECTRO-FILTRATION À L'INTÉRIEUR DES SONDAGES TRAVERSANT DES COUCHES POREUSES

G. SCHLUMBERGER

(Présenté par I. Gubkin, *membre de l'Académie)*

Les phénomènes d'électro-filtration, qui prennent naissance lorsque de l'eau filtre à travers une roche poreuse, produisent à l'intérieur d'un sondage rempli d'eau et recoupant des couches perméables des différences de potentiel que l'on peut mesurer avec précision. La mesure de ces différences de potentiel est faite dans la partie non encore tubée des sondages en cours d'exécution. Elle permet l'étude des couches poreuses et conduit à divers résultats pratiques que la présente note a pour but d'exposer.

La technique adoptée est représentée sur le schéma ci-joint (p. 388). Une électrode métallique A, suspendue à un câble conducteur isolé, est descendue dans le sondage à différentes profondeurs. Le câble passe sur un treuil servant à sa manoeuvre et est connecté par son extrémité supérieure à une des bornes d'un potentiomètre. L'autre borne de celui-ci est reliée à une seconde électrode B, de constitution identique à A et touchant la surface du sol en un point fixe au voisinage de l'orifice du sondage. Les mesures ainsi données par le potentiomètre sont représentées sous la forme d'un diagramme, dans lequel on porte en ordonnées les diverses profondeurs de l'électrode A et en abscisses les différences de potentiel entre A et B.

La nature des électrodes joue un certain rôle, car les différences de potentiel à mesurer sont petites. Elles sont en général de l'ordre de quelques millivolts et ne dépassent qu'exceptionnellement une centaine de millivolts. Il faut donc éviter d'avoir entre les deux électrodes A et B, dont le circuit se ferme par le sol, une différence de potentiel importante provenant des forces électro-chimiques de contact entre le métal et le sol ou bien l'eau du sondage. On utilise avantageusement pour cela, soit des

électrodes d'un type impolarisable telles que celles constituées par du cuivre entouré d'une enveloppe poreuse pleine d'une solution de sulfate de cuivre, soit même de simples électrodes en plomb préalablement bien égalisées par une électrolyse au courant alternatif. Avec ces précautions la force électromotrice d'origine chimique existant entre A et B est petite, et se maintient très stable pendant la durée d'une expérience. En deplaçant A dans l'eau remplissant le sondage, on peut mesurer ainsi les variations du potentiel le long du trou avec une précision qui pour des déplacements de quelques dizaines de mètres, est de l'ordre d'une fraction de millivolt. Cette précision est donc suffisante pour l'étude soignée des phénomènes envisagés.

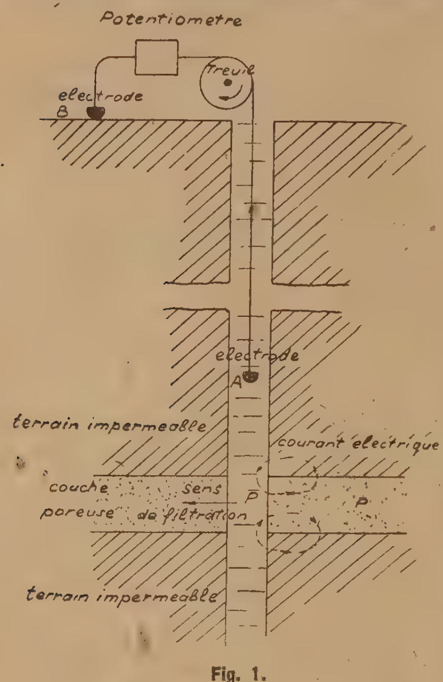


Fig. 1.

Les différences de potentiel qui existent spontanément à l'intérieur d'un sondage plein d'eau et qui sont figurées sur un diagramme comme il est dit plus haut, peuvent être dues aux trois causes suivantes:

1) les courants telluriques naturels verticaux;

2) les réactions électro-chimiques entre les diverses couches de terrain;

3) les phénomènes d'électro-filtration provoqués par la pénétration de l'eau du sondage à l'intérieur des couches poreuses où règne une pression moindre que celle à l'intérieur du sondage.

Laissons de côté les deux premières causes, qui ne paraissent produire en général que des différences de potentiel assez faibles, ainsi que les perturbations parasites attribuables à un manque d'homogénéité de l'eau du sondage ou à une action thermique sur l'életcrode A. Examinons seulement l'électro-filtration. Elle se reconnait d'une manière précise au fait qu'elle varie en fonction de la pression qui la provoque, c'est-à-dire qu'elle change lorsque l'on modifie la pression dans le trou du sondage, par exemple en diminuant la hauteur de la colonne d'eau, en alourdissant cette eau par une addition d'argile ou autrement.

Passons d'abord en revue les faits fondamentaux constatés. Quand on établit les diagrammes de potentiel spontané dans deux sondages voisins, on observe que ces diagrammes se ressemblent. Les mêmes horizons géologiques se traduisent par des variations analogues de potentiel. D'autre part chaque couche poreuse se manifeste par l'existence à son niveau, dans l'eau du sondage, d'une zône à potentiels négatifs vis-à-vis des potentiels mesurés au-dessus ou au-dessous de la couche. Ceci démontre, ainsi que l'indique le schéma, l'éxistence de filets de courant circulant dans l'eau homogène du sondage et pénétrant dans la couche poreuse, comme s'ils étaient entrainés par l'eau dans sa filtration. Nous supposons en effet que la pression P à l'intérieur du sondage est plus forte que la pression p règnant dans la couche poreuse, car cela est presque toujours réalisé en pratique dans les forages au cours de leur exécution, afin d'éviter que les couches d'eau, d'huile ou de gaz ne débitent dans le sondage sous une forme plus ou moins éruptive. On constate enfin qu'un abaissement de la pression P se traduit par une diminution des différences de potentiel au niveau des couches poreuses et qu'il peut même y avoir suppression de tout phénomène électrique lorsque l'équilibre des pressions P et p est réalisé. Ce dernier point toutefois, à cause du danger de l'expérimentation dans les forages pour pétrole des champs à haute pression, n'a pu jusqu'à présent être observé que sur une couche aquifère. La durée nécessaire pour réaliser les variations de différences de potentiel, c'est-à-dire pour obtenir un nouveau régime stable de filtration, n'est pas encore bien connue. Il est probable que dans les terrains argileux visqueux le phénomène est loin d'être instantané.

Les constatations expérimentales ci-dessus s'expliquent bien par les lois de l'électro-filtration, telles que Quincke les a jadis formulées. La force électro-motrice E de filtration est proportionnelle à la pression agissante. Elle dépend de la nature de l'électrolyte filtrant et du diélectrique poreux. Dans le cas présent on peut donc écrire: $E = K(P - p)$, en désignant par K un coefficient fonction de la nature de l'eau du sondage (résistivité et viscosité) et de la nature de la roche poreuse. Dans la grande majorité des cas, en particulier pour de l'eau filtrant à travers un sable, le sens de la force électro-motrice E est tel que celle-ci produit des potentiels positifs en aval de la filtration et des potentiels négatifs en amont. Il en résulte que, dans le cas examiné, des filets de courant doivent s'établir en pénétrant à partir du sondage dans la couche poreuse, puis en se refermant par en-dessus et par en-dessous à travers les roches imperméables qui entourent la couche poreuse. Lorsque l'on diminue P la force électro-motrice E décroit

et par suite également les différences de potentiel mesurées dans le sondage, qui sont proportionnelles à E. Il doit y avoir annulation du phénomène quand P est égal à p.

Passons enfin aux applications pratiques que ces phénomènes ont déjà permis de réaliser. Il y a d'abord la corrélation géologique entre sondages voisins, par la comparaison des diagrammes des potentiels établis dans ces sondages. Cette corrélation est particulièrement nette lorsque les terrains comportent plusieurs couches très poreuses et à faible pression, donnant ainsi lieu à une filtration énergique. Il y a ensuite l'étude des couches poreuses traversées, la détermination de leur profondeur, la mesure de leur épaisseur et probablement aussi la mesure de la pression p qui y règne. En effet, en ce qui concerne ce dernier point, la formule: $E = K(P - p)$ montre que si l'on donne à la pression dans le sondage une nouvelle valeur P', la force électro-motrice de filtration prend une valeur E' telle que: $E' = K(P' - p)$. Ces deux équations permettent par élimination de K d'exprimer la pression inconnue p en fonction de quantités facilement mesurables, savoir: P et P' qui sont connus par la hauteur et la densité du liquide remplissant le sondage; le rapport $\frac{E}{E'}$ qui est égal au rapport des différences de potentiel mesurées dans le sondage, au même point, avant et après le changement de pression. Disons toutefois que les essais dans cette dernière voie viennent à peine de commencer et qu'il faudra un certain temps avant de connaître la valeur pratique du procédé.

En résumé, l'expérience acquise démontre qu'il est possible de faire des mesures précises de potentiel à l'intérieur des sondages dans leur partie non tubée jusqu'à des profondeurs considérables (plus de 2000 mètres) et ceci avec un dispositif extrêmement simple, bien qu'il s'agisse de l'étude de phénomènes très petits ne mettant en jeu que des énergies insignifiantes. Les diagrammes des potentiels spontanés ainsi établis donnent des renseignements géologiques sur la nature des terrains traversés, en particulier sur les couches poreuses. Les essais qui ont conduit à ces conclusions ont été pour une grande partie, executés en URSS au cours du 2-e semestre 1931, notamment dans les champs pétrolifères de Grozny et de Bakou avec la collaboration des géologues des trusts de pétrole et des ingénieurs soviétiques. Ils sont poursuivis à l'heure actuelle sur une large échelle.

К. ШЛЮМБЕРЖЕ. СООБЩЕНИЕ ОБ ЯВЛЕНИЯХ ЭЛЕКТРОФИЛЬТРАЦИИ В СКВАЖИНАХ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ПОРИСТЫЕ ПЛАСТЫ

ПЕРЕВОД

Явления электрофильтрации, возникающие при фильтрации воды через пористую породу, создают внутри скважины, наполненной водой и пересекающей проницаемые пласты, разность потенциалов, которую можно измерить с точностью. Измерение этих разностей потенциалов производится в еще необсаженной части бурящейся скважины. Оно позволяет производить исследование пористых пластов и приводит к различным практическим результатам, описание которых является целью настоящего сообщения.

Применяемая установка изображена на приложенной схеме (стр. 388). Металлический электрод A, подвешенный к изолированному проводнику, опускается на различную глубину в скважину. Провод идет к лебедке, служащей для маневров, и присоединяется своим верхним концом к одному из зажимов потенциометра, другой зажим которого присоединен ко второму электроду B, тождественному первому и соприкасающемуся с земной поверхностью в неподвижной точке, расположенной недалеко от устья скважины. Замеры, полученные потенциометром, изображены в виде диаграммы, на ординатах которой нанесены различные глубины электрода A, а на абсциссах — разности потенциалов между A и B.

Природа электродов играет известную роль, так как предназначенные к замерам разности потенциалов малы, равняясь, в общем, нескольким милливольтам и лишь в виде исключения превышая сотню милливольт. Поэтому, следует избежать наличия между обоими электродами A и B (цепь которых замыкается через землю) электрохимических контактных сил между металлом и породами или же содержимым скважины. Для этого удобно использовать или электроды неполяризующего типа, как напр., сделанные из меди, окруженные пористой оболочкой, наполненной раствором медного купороса, или же простые свинцовые электроды, заблаговременно хорошо уравновешенные электролизом с помощью переменного тока. При этих предосторожностях электродвижущая сила химического происхождения между A и B бывает мала и очень постоянна во все время опыта. Передвигая A в растворе, наполняющем скважину, можно таким образом измерить разность потенциалов вдоль скважины с точностью, равной доли милливольта, для перемещения в несколько десятков метров. Эта точность достаточна для тщательного изучения интересующих нас явлений.

Разности спонтанных (самопроизвольных) потенциалов, существующие внутри скважины, наполненной водой, и изображаемые на диаграмме, могут быть вызваны следующими тремя причинами:

1) Естественные теллурические (земные) вертикальные токи;

2) Электрохимические реакции между различными пластами;

3) Явления электрофильтрации, вызванные проникновением раствора скважины внутрь пористых пластов, давление которых меньше давления внутри скважины.

Оставим в стороне две первые причины, дающие вообще довольно незначительные разности потенциалов, так же, как и пертурбации, созданные неоднородностями раствора или термическим действием на электрод A, и исследуем только электрофильтрацию. Она точно обнаруживается благодаря тому, что ее колебания являются функцией давления, ее порождающего. Она меняется с изменением давления в скважине, например, при уменьшении высоты столба раствора, утяжелении этого раствора добавленим глины, или иначе.

Рассмотрим сперва наблюдаемые основные факты. Составляя диаграммы спонтанных потенциалов для двух соседних скважин, видим, что эти диаграммы сходны. Одинаковые геологические горизонты дают аналогичные колебания потенциала. С другой стороны, всякий пористый пласт выявляется благодаря существованию в растворе скважин, на уровне пласта, зоны потенциалов, отрицательных по отношению к потенциалам, замеренным над или под пластом. Это доказывает существование, в соответствии с указаниями схемы, силовых линий тока, циркулирующих в однородном растворе скважины и проникающих в пористый пласт, как если бы они были увлечены водою при ее фильтрации. В самом деле, мы предполагаем, что давление P внутри скважины больше давления p, существующего внутри пористого пласта, поскольку это почти всегда существует на практике при бурении скважин для избежания обратного тока воды, нефти или газа с более или менее фонтанными проявлениями. Констатируют, наконец, что уменьшение давления P соответствует уменьшению разности потенциала на уровне пористых пластов, вплоть до исчезновения всего электрического явления в том случае, когда достигнуто равновесие между давлениями P и p. Этот последний случай, благодаря опасности производить опыты в нефтяных скважинах на месторождениях с высоким давлением, был наблюдаем только для одного водоносного пласта. Время, необходимое для реализации изменения разности потенциалов, т. е. для получения нового устойчивого режима фильтрации, еще хорошо неизвестно. Вероятно, что для глинистых вязких пород явление далеко не мгновенно.

Вышеуказанные экспериментальные наблюдения хорошо объясняются законами электрофильтрации, формулированными в свое время Куинке (Quincke). Электродвижущая сила фильтрации E пропорциональна действующему давлению. Она зависит от натуры фильтрующего электролита и пористого диэлектрика. Можно для настоящего случая формулировать $E = K(P - p)$, где K представляет коэффициент, зависящий от природных свойств как бурового раствора (сопротивление и вязкость), так и пористого пласта. В большинстве случаев, в частности для воды, фильтрующейся через песок, направление электродвижущей силы таково, что она образует положительные потенциалы вниз по течению фильтрации и отрицательные потенциалы вверх по течению. Отсюда следует, что силовые линии тока в рассматриваемом случае должны возникать, проникая из скважин в пласт и замыкаясь затем сверху и снизу сквозь непроницаемые породы, окружающие пористый пласт. При уменьшении P, электродвижущая сила E снижается, и поэтому также уменьшается разность потен-

циалов, измеренная в скважине и пропорциональная E. Если P равно p, то явление исчезает.

Перейдем, наконец, к практическим применениям, которые эти явления уже позволили реализовать. Сравнивая диаграммы потенциалов, составленные для соседних скважин, имеем, во-первых, геологическую корреляцию этих скважин, которая особенно ясна в том случае, когда среди отложений имеются несколько весьма пористых пластов с слабым давлением, дающим энергичную фильтрацию. Имеем затем: исследование пройденных пористых пластов, определение их глубины, замеры их мощности и, по всей вероятности, определение давления p, в них существующего. В самом деле, что касается этого последнего пункта, то формула $E = K(P - p)$ показывает, что если давлению в скважине дать новое значение P', то электродвижущая сила фильтрации примет значение $E' = K(P' - p)$.

Эти два уравнения позволяют, исключив K, выразить неизвестное давление p в функции легко измеряемых величин, а именно P и P', которые определены высотою и плотностью раствора, наполняющего скважину, отношение $\frac{E}{E'}$, равное отношению разности потенциалов, — измерением в точке скважины до и после изменения давления. Впрочем, опыты в этом направлении только начинаются, и необходимо некоторое время, прежде чем выяснится практическое значение этого метода.

В общем, имеющийся опыт доказывает, что внутри скважины, в ее некрепленной части, можно производить, до значительной глубины (свыше 2000 м), точные измерения потенциалов с очень простой установкой, несмотря на то, что исследуются явления, выделяющие ничтожную энергию. Составленные таким образом диаграммы спонтанной поляризации дают чеологические указания о природе встреченных пород, в частности — о пористости пластов. Опыты, которые привели к этим заключениям, были произведены во второй половине 1931 г. на нефтяных полях Грозного и Баку при сотрудничестве геологов трестов и советских инженеров. В настоящее время опыты продолжаются в широком масштабе.

ПРИМЕЧАНИЕ. Проф. Конрад Шлюмберже, которому принадлежит напечатанная выше заметка об электрических явлениях внутри буровых скважин, является одним из основателей электрометрической разведки. Его методы нашли в СССР широкое применение в поисковых работах на нефть, производимых как на поверхности для разведки скрытых структур, так и внутри уже пробуренных скважин, для составления их электрического разреза и обнаружения нефтяных пластов. Эта последняя группа исследований, так наз. кароттаж, является в настоящее время неотъемлемой частью геологического обслуживания нефтяных промыслов.

В своей заметке, составленной еще в декабре 1931 г., проф. Шлюмберже приписывает явлениям электрофильтрации основную роль в аномалиях естественного электрического поля, существующего внутри скважины.

Наблюдения, проведенные советскими геологами и инженерами Азнефти и Грознефти показали, что помимо электрофильтрации весьма существенное, иногда и доминирующее значение имеют электрохимические явления, возникающие в скважине благодаря различным физикохимическим свойствам растворов (например пластовых вод и бурового раствора, напоминающего скважину).

В настоящее время не представляется возможным говорить об электро-явлениях в скважине, не упоминая об электродвижущих силах химического происхождения, о механизме которых нужно сказать несколько слов.

Внутри буровой скважины электрохимические явления возникают, главным образом, благодаря различной концентрации поваренной соли, находящейся в растворенном состоянии в пластовых водах и в буровом растворе.

Между этими электролитами, приведенными в соприкосновение со стволом скважины, возникает некоторая разность потенциалов, причем наиболее концентрированный электролит является положительным по отношению к другому. Все вместе представляет нечто в роде известного из физики «элемента концентрации».

Рассмотрим случай в скважине, предполагая, что единственным электролитом является поваренная соль и что буровой раствор минерализован менее, чем пластовая вода, насыщающая коллектор M, заключенный между непроницаемыми пластами N и N^1. Назовем через C_1 концентрацию NaCl в пластовой воде и через C_2 — концентрацию бурового раствора. Опыт и теория показывают, что в скважине вблизи коллектора M возникают электрические токи, текущие по направлению от N и от N^1 к M. Профиль потенциалов, замеренный описанным Шлюмберже методом, покажет, следовательно, на уровне пласта M некоторый минимум, величина которого Δv пропорциональна $\log \frac{C_1}{C_2}$. Закон, регулирующий явления электрофильтрации может быть представлен в виде

$$\Delta v = K \log \frac{C_1}{C_2},$$

где K является константой, зависящей от ряда факторов, в частности — от натуры электролитов, температуры и т. д.

Не останавливаясь на детальном описании практического применения указанной теории, скажем, что она значительно облегчила и уточнила интерпретацию результатов электрических замеров внутри скважин, позволяя, в частности, выбирать наиболее подходящий буровой раствор и сводя к минимуму случаи неудачных исследований скважин.

Заслуживает особого внимания, что методика исследований в скважинах, являясь сравнительно молодой, смогла быстро развиться именно в советских условиях, где отсутствие частной собственности и активное участие всего коллектива инженерно-технических работников открыли широкую возможность сопоставлений результатов по отдельным районам, дав широкие перспективы для обмена опытом и дальнейшего продвижения науки.

В этом отношении наши условия уже позволили начать перегонять капиталистические страны, где зародилась данная методика, но где общие условия явились тормазом для ее развития.

Акад. И. Губкин

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ПО ПОВОДУ КРИТИЧЕСКИХ ЗАМЕЧАНИЙ АКАД. А. М. ДЕБОРИНА[1]

В. И. ВЕРНАДСКОГО

1

В ответ на мою статью «Проблема времени в современной науке»[2] помещена в Известиях Академии большая статья акад. А. М. Деборина[3] «Проблема времени в освещении акад. Вернадского», к сожалению, основанная сплошь на недоразумении и представляющая совершенно фантастическое изложение философских взглядов, будто бы мной высказываемых.

Мне приписывается странное, кажущееся почти комическим ученому нашего времени, миропредставление, которое академик Деборин излагает следующим образом: «Но уже из сказанного с полной ясностью (! — мой восклицательный знак) следует, что под видом научного анализа «эмпирического обобщения» понятия времени нам преподнесли окутанное густым туманом «новое» (кавычки ак. Деборина) религиозно-философское мировоззрение, согласно которому в мире обитают бесплотные духи («духовные начала»), существуют явления вне времени и пространства и где свободная творческая человеческая личность строит свое царство (подчеркнуто акад. Дебориным) в мире «свободной научной мысли» (кавычки акад. Деборина) путем мистического созерцания и переживания «эмпирического мгновения». Все мировоззрение В. И. Вернадского, естественно, глубоко враждебно материализму и нашей современной жизни, нашему социалистическому строительству».

[1] Редакционно-издательский Совет Академии Наук СССР, помещая в настоящем номере ИМЕН статьи акад. В. И. Вернадского и акад. А. М. Деборина, считает законченной полемику на страницах ИМЕН, возникшую по поводу доклада акад. Вернадского о проблеме времени в современной науке.

[2] В. И. Вернадский, ИМЕН, 1932, № 4, стр. 511—542.

[3] А. М. Деборин, там же, стр. 543—569.

Неужели это все серьезно? Становится жутко: каким логическим процессом можно было получить такой вывод из чтения моей статьи о проблеме времени в современной науке? Или это мистификация, игра философского ума? Как мог акад. Деборин серьезно приписать такое детски-наивное, чтобы не сказать иначе и проще, мировоззрение натуралисту XX века, работающему долгие годы неуклонно в сложных и новых научных проблемах, идущему по новым путям и по ним ведущему других? С каким пониманием современной науки он приступил к чтению современной научной работы? Как мог он думать, что среди научно работающих представителей точного знания, точных наук, могут существовать в XX веке такие монстры, каким он меня в полете своей философской фантазии или свободы от наук рисует? Да и как он для того, чтобы это было возможно, представляет себе современную научную работу, какое он о ней имеет понятие?

Вопросы эти и подобные возникают при чтении его статьи. На них, конечно, я не могу останавливать внимание читателей и разбирать их не буду. Но я считаю себя обязанным не оставить статью акад. Деборина без ответа. Во-первых, потому, что, если бы приписываемые акад. Дебориным фантастические представления хоть в сотой доле отвечали действительности, они могли бы сильно помешать моей научной работе в пределах Союза, а во-вторых, потому, что я считаю вхождение в нашу научную мысль употребляемых им приемов философской и теологической критики вредным и опасным явлением, ослабляющим научную работу нашей страны в мировом ее выявлении.

А между тем в переживаемый нами исторический момент успех зависит прежде всего от широты и глубины свободного размаха в нашей стране научной работы и научного творчества.

Может быть первая же страница статьи акад. Деборина (стр. 543) дает ключ к выяснению странной и для меня неожиданной реакции моей статьи на акад. Деборина. Акад. Деборин говорит: «Избранная акад. Вернадским тема «Проблема времени» (sic — автор) чрезвычайно серьезная и ответственная. Она обязывает автора, прежде всего, к четкой философской установке». Я думаю, что все это утверждение основано на недоразумении, ибо акад. Деборин неправильно указывает тему моей статьи. Я говорю не о «проблеме времени», а «о проблеме времени в современной науке». Очевидно для всякого, не только для философа, что это совершенно разные темы. Первая тема — философская, вторая чисто научная. Для первой темы, подставленной вместо моей акад. Дебориным, нужна была бы «четкая философская установка» — для второй, моей, научной темы она

не только не нужна, но и невозможна. Для нее нужна четкая научная установка. Ибо, если бы я занялся философией, я бы не смог научно над этой моей темой работать — не осталось бы ни времени, ни сил. Дать «четкую философскую установку проблемы времени»! — Да на это не хватит жизни. Вероятно, акад. Деборину, как философу, известно, что такой установки не дано в трехтысячелетней истории философии и что таких установок может быть много, во всяком случае несколько.

В связи с этим на той же странице (стр. 543) академик Деборин мне приписывает философский эклектизм: «Что же можно сказать о философской установке автора? На этот вопрос должно ответить, что в философском отношении доклад представляет яркий пример эклектизма». Я думаю, что здесь уже чисто философский анализ ак. Деборина оказался слишком поверхностным; как видно будет из дальнейшего, я имею определенное философское мировоззрение, и то, что акад. Деборин принял за философский эклектизм — есть философский скепсис. Мне кажется, если с этой точки зрения прочесть мою статью — это будет ясно.

Поставленная мною определенная и относительно узкая тема моего доклада тесно связана с той большой работой геохимического характера, которую я веду непрерывно и неуклонно с 1916 года, которая уже дала новые результаты, которые я считаю важными, возбуждает сейчас все больше внимания, мне кажется начинает входить в научное миропонимание нашего времени, привела к новой научной дисциплине — к биогеохимии.

В этой речи — исторического характера — я старался — мне кажется, в первый раз: 1) точно установить, как глубоко независима проблема времени в современной науке от ее стародавних философских построений, не говоря уже о теологических, интересовавших Ньютона, Эйлера, Максуэла — в XVII — XIX столетиях, а в XX столетии интересующих акад. Деборина (вопрос о существовании Божием) и 2) выяснить, в каких частях проблемы требуется сейчас философская работа мысли для успешности научного синтеза.

Необходимость выяснения исторического выявления хода мысли в проблеме времени и освобождение ее от чисто философских представлений о времени (т. е. от «философской четкости») вытекала для меня из моей текущей радиологической и биогеохимической работы.[1] Я сейчас же использо-

[1] В моих статьях «Radioaktivität und die neuen Probleme d. Geologie», Electrochem. Zeitschr., 1932. S. 523. и «Ozeanographie und Geochemie» (печатается в Tschermak's Petrogr. u. Mineralog. Mitteilungen).

вал результаты этого моего анализа[1] и в дальнейшем буду ими пользоваться для выяснения проблемы биологического времени.

2

На этом я мог бы закончить свои замечания по существу, так как акад. Деборин обошел молчанием как раз те философские вопросы, которые в проблеме времени сейчас должны интересовать ученого.

Ясно, что я не могу серьезно вдаваться в разбор трафаретно-мистического миропредставления, приписанного мне акад. Дебориным, очевидно, вполне наивно не сознающим, насколько архаичным оно должно представляться ученому, почти 50 лет непрерывно научно работающему над основными вопросами точного знания. Когда встречаешься с таким удивительным непониманием своего философского мировоззрения — а я его имею — лучше всего изложить его самому.

Я делаю это не только из-за неимения времени для неожиданно для меня выпавшей и мне малоинтересной полемической задачи, но и потому, что уже второй раз встречаюсь со столь же фантастическим изложением моих философских взглядов.[1] Лучше дать их положительное изложение — раз они начинают интересовать наши философские круги. Убеждать никого я не хочу. Да и как убеждать философов, строящих в сущности свое мировоззрение на вере? Как могу я с ними спорить, когда основное их положение — равноценность по достоверности философского и научного знания в научных проблемах или даже примат философского — мною сознательно отвергается? Когда в этих проблемах для меня несомненен примат научного знания, научных методов перед философскими знаниями и методами?

Но прежде чем приступить к этому изложению, я все же хочу на нескольких примерах показать, каким способом обрабатывает акад. Деборин мой текст для того, чтобы придти к своим фантастическим выводам.

Так как вся статья акад. Деборина охвачена одним и тем же приемом неправильного изложения мыслей автора и подстановкой по отношению ко мне отсутствующих в моей статье чужих мыслей, — то выбор примеров чрезвычайно легок. Каждая страница статьи акад. Деборина дает для этого яркий материал.

Я ограничусь первыми страницами его статьи.

На первой же неполной странице (стр. 543 — из которой я приводил уже характерные искажения) акад. Деборин говорит: «Чрезвычайно харак-

[1] См. Д. Новогрудский. Под знам. марксизма, М., 1931, № 7 и 8, стр. 168—203.

терно, что религиозное знание ставится в один ряд с научным и философским знанием. С одинаковым правом можно было бы дополнить этот ряд оккультизмом и спиритизмом». Как это утверждение совместить с тем, что я говорю (стр. 517): «Научное знание в двух своих проявлениях резко и определенно отличается от всякого другого знания: философского, религиозного, от «народной мудрости», «здравого смысла» — бытового, векового знания человеческих обществ».

Очевидно, что для меня в вопросах, охваченных научным знанием, не может быть и речи о равном с ним значении религиозного и философского знания. Этим убеждением проникнута не только моя статья, но вся моя жизненная работа. Правда, я ставлю «в один ряд» религиозное и философское знание, как это ясно и из моей цитаты (стр. 517), но оба и философское и религиозное знание отличаю от научного — иногда чрезвычайно резко.

На нескольких следующих страницах акад. Деборин делает ряд выводов из приписанного мне им представления о том, что религиозное знание может быть поставлено в один ряд с научным (как я не думаю). Очевидно, все это рассуждение (543—546) меня не касается.

Выйдя из дебрей, ак. Деборин на стр. 547 мне приписывает (без цитаты) такую нелепость: «чистейшей мистикой является утверждение, что значительная часть знания является общеобязательной для всех проявлений жизни, т. е. вплоть до Infusoria». Откуда это академик Деборин взял? Я в своем уме и, очевидно, не могу говорить такие глупости. Правда, акад. Деборин называет на своем философском языке это «чистейшей мистикой», — но такое понимание мистики уже очень своеобразно, и едва ли есть современные философы, которые согласятся с таким пониманием мистики.

На той же 547-й странице мне приписывается, как исходное для моей мысли, признание абсолютной истины и абсолютного заблуждения. Он говорит: «Он (акад. Вернадский) исходит из существования абсолютных истин». Мне было бы любопытно, чтобы ак. Деборин процитировал место в моей статье, на основании которого он это утверждение делает. Я говорю (стр. 517—516) об общеобязательных истинах и аксиоматичности. Но это отнюдь не абсолютные истины, что, конечно, как философу, акад. Деборину должно быть известно. Может быть, ему известно и то, что ни один современный ученый, поскольку он ученый, не будет говорить об абсолютных истинах. Это область философии и метафизики. Как таковой, академик Деборин и дальше говорит о них (стр. 548) при изложении своего

философского миропредставления, которое он считает и называет материалистическим. Очевидно, все выводы, какие он мне дальше приписывает, допуская признание мною абсолютных истин, ложны. Он строит карточный домик, да еще из своих собственных карт — не моих.

Но если здесь я могу говорить о странных недоразумениях, я должен самым решительным образом протестовать против того, что он говорит на следующей 548-й странице. Я должен протестовать против тона, каким в данном случае философ, приписав мне, не понявши моей статьи, чуждые мне мнения, позволяет себе меня же обучать научной работе. Он говорит: «Очевидно, что автор не уяснил себе значения и роли научных теорий и гипотез, а равно их связи с эмпирическими обобщениями». К несчастью, таким поучениям приходится подвергаться на каждом шагу еще в более грубой форме. Смею уверить своего коллегу по Академии, что я умею и очень ясно это различать. И сейчас как раз, когда акад. Деборин печатает эти строки — я могу представить объективное опровержение его глубоко ошибочного понимания моей научной работы и моего уменья научно работать.

Позволю себе на этом остановиться, так как это очень ярко показывает до какой степени акад. Деборин не критически относится к своим знаниям и не может понять их ценности для научной работы, пределов их точности.

Тридцать лет тому назад — в 1901 году, когда никто еще не мог не только предвидеть, но и мечтать, что мы сможем измерять расположение атомов химических элементов в пространстве, я сделал эмпирическое обобщение о строении алюмосиликатов, самых основных тел, строящих земную кору (больше 80% ее по весу) и указал, что связь между атомами кремния, алюминия и кислорода такова, что они — в определенном соотношении ($Al_2Si_2O_7$) — должны находиться вместе. Я назвал этот комплекс каолиновым ядром и указал, в каких минералах он должен наблюдаться. В 1911—1912 году открыт рентгенометрический анализ кристаллов, и в прошлом (1931) году впервые этим новым путем проф. Шибольд в Лейпциге доказал существование каолинового ядра сперва в полевых шпатах.[1] Оно оказалось как раз в тех группах минералов, в которых я его за 30 лет указал, благодаря правильному пониманию мною различий между научными гипотезами, научными теориями и эмпирическими обобщениями; каолинового ядра нет там, где, по моим указаниям, — моей научной теории, — оно и не должно было быть. Сейчас на основании этого подтверждения моей

[1] G. Schiebold, Neues Jahrb. f. Mineral. B. B. 64, 1931, p. 275—276.

теории идет дальнейшая работа — в Берлине и Лейпциге — по открытому 30 лет назад пути. Вскрываются новые явления.

Область химии силикатов находится сейчас в коренной переработке, но в этой переработке основные черты моей научной теории выдерживаются. Я только что и в Берлине и в Лейпциге видел на моделях отвечающие измерениям и вычислениям рентгенограмм каолиновые ядра в полевых шпатах, минералах семейств нефелина, цеолитов и т. п. То, что я теоретически научно вывел в молодости, как долженствующее быть, я имел счастье в старости увидеть, как научно установленный факт, как научную истину.

Ясно, как должен относиться при таких обстоятельствах ученый к поучениям философа, его учащего методу работы, но не умеющего оценивать точность своих выводов и не желающего понять общеобязательность правильно сделанных научных выводов и неизбежную индивидуальность и сомнительность в сфере реальности природных явлений философских построений.

Научная истина устанавливается не логическим доказательством, не рационалистически, а опытом и наблюдением в природе, в реальности.

Так, опытом и наблюдением и основанным на них вычислением утверждается и существование каолинового ядра, получающего, конечно, при этом совершенно новое понимание.

В стране, где научная мысль и научная работа должны играть основную роль, ибо с их ростом и развитием должны были бы быть связаны основные интересы жизни — ученые должны быть избавлены от опеки представителей философии.

Этого требует польза дела, государственное благо.

На стр. 550 акад. Деборин, наконец, хочет перейти к проблеме времени. И здесь сразу цитата, искажающая мою мысль. Акад. Деборин говорит (550). «С самого начала он (Вернадский) заявляет о своем согласии с новой философской мыслью, представляемой Анри Бергсоном». Я же говорю: «Время связано в нашем сознании с жизнью. Это ярко проявляется в новой философской мысли в отождествлении времени — дления — с жизнью. В этом основа влияния идей Анри Бергсона, жизненной философии Георга Зиммеля» (стр. 512). Где здесь речь о моем согласии с новой философской мыслью и с Бергсоном? Здесь речь идет о причине влияния в современной цивилизации философий Бергсона и Зиммеля, а не о моем принятии философии Бергсона. Могу успокоить акад. Деборина, — я не бергсонианец.

Все выводы, которые делает акад. Деборин из этого предположения, основаны не на моем скрываемом (почему?) бергсонианстве, а на недопустимом в научной работе способе обращения с чужой научной мыслью, которым пользуется академик Деборин.

Так продолжается на протяжении всей его статьи.

Я мог бы идти дальше и проследить это шаг за шагом, но это скучная и неблагодарная работа, раз выяснился уже общий метод примененной здесь «философской» критики.

3

Я хочу лишь остановиться на принципиальной стороне.

Представим себе, что акад. Деборин, разбирая мою статью, как статью философскую, не ошибался бы, как он непрерывно это делает в своей критике, и правильно бы читал мою статью, а не вычитывал бы по какой-то аберрации в ней то, чего в ней не сказано.

Допустим ли тогда такой его прием; а именно: на основании философской критики научной статьи выводить из нее философское миросозерцание ученого.

Я думаю, что недопустим. При полной добросовестности мысли почти неизбежен ложный вывод, почти неизбежно для этого «неправильно» читать научную статью и делать из нее своеобразные цитаты. Ибо без этого у него обычно не было бы материала для философского суждения — ибо в научной статье обычно (как и в моей) нет философского содержания в смысле определенного положительного философского учения. А раз его нет, то и нельзя его, при добросовестной мысли, найти. Философски можно использовать приводимые в научной статье выводы или обобщения, но понятия о философском миропонимании ученого они не дадут — они будут лишь давать понятие об идеологии того философа, который ими пользуется. Можно было бы оценивать затрагиваемые в статье нерешенные философские проблемы, но никакого отношения к миросозерцанию автора статьи, очевидно, эти проблемы не имеют.

Акад. Деборин должен понять тот простой факт, что множество ученых совсем не интересуются философскими проблемами, обходятся в своей работе прекрасно и с огромным успехом — без их изучения. И в то же время нередко работы этих ученых возбуждают философские проблемы и могут быть интересны для философов. Из их статей философ в действительности не может вывести, очевидно, никакого представления о их философском мировоззрении — даже если он будет пользоваться для этого свое-

образным критическим аппаратом акад. Деборина — просто потому, что у них его нет.

Я не принадлежу к числу таких ученых и имею совершенно определенное философское мировоззрение, которое мне дорого и которое мною продумано в течение моей долгой жизни. Я нисколько не сомневаюсь, что если правильно и критически философ прочтет мои работы последних 16 лет, он ясно увидит, что оно красной нитью проходит через мою научную работу.

В течение моей долгой жизни я несколько раз возвращался к философскому мышлению и к систематическому изучению произведений некоторых великих философов. Здесь не место этого касаться. Отмечу лишь, что только в 1916 г. и позже передо мною стала необходимость ясно установить мое философское миросозерцание. Ибо в это время я подошел к научным проблемам, имеющим по существу, помимо большого научного значения, не меньшую философскую значимость — к биогеохимическим процессам, к положению жизни на нашей планете, к ее влиянию на геологические, главным образом, геохимические процессы, к механизму биосферы.

В это время передо мной стала проблема: как научно охватить явления биогеохимии так, чтобы можно было свободно научно работать и не сойти в натурфилософскую область мысли. Последний путь был легче, но я знал и из истории науки, а затем из изучения натурфилософов убедился сам, что он — безнадежен. Ибо соображения философов в области реальной действительности всегда — в положительной своей части — состоят из шлака и металла, в которых шлак преобладает, а металл скрыт и становится видим только при проникновении к тем же проблемам научного анализа. Когда в связи с биогеохимическими проблемами я подошел ближе к биологической литературе, меня поразило то значение, какое в этой области играла в XIX веке и играет сейчас философская мысль, оказывавшая не раз вредное влияние на научную работу. Долго к этому я не мог привыкнуть. Но я понял, что здесь нельзя оставаться без четкого выяснения своего философского отношения к предмету исследования.

Мое философское мировоззрение сложилось окончательно именно в эти годы под этими влияниями. Оно может быть охарактеризовано как философский скепсис,[1] к которому я склонялся давно, но его не принимал.

[1] Я не могу — да и не хочу — здесь заниматься выяснением хода своего философского миропонимания, — но, очевидно, оно не является неизменным на долгом протяжении моей жизни с 1880-х годов и до 1916 г. и позже. Поэтому попытка Д. Новогрудского (l. c.), берущего мои статьи разных времен, для выяснения единого на всем протяжении времени философского моего миропонимания, очевидно, и логически и научно ошибочна. Она должна была — и привела — к фантастическим и спутанным представлениям.

То, что я должен был в это время установить свое философское миропонимание, тесно связано с той своеобразной научной областью явлений, какую представляет из себя биосфера, область жизни на земле, которая является сейчас объектом моего исследования, главным образом, с точки зрения физико-химической. В биосфере ярко выявляются особенности жизни, ее резкое отличие от косной материи, и в то же время только с биосферой связан человек и только одну ее он может непосредственно ощущать. Все остальные части вселенной человек познает только косвенным путем.

Человек стал передо мной (раньше занимавшимся минералогическими, геологическими и химическими науками) впервые как новый неизвестный мне объект исследования, как биогеохимическая сила. Раньше я сталкивался с ним с совершенно другой точки зрения при изучении — по первоисточникам — истории научной мысли.

Вся область биосферы — область жизни, и человек в частности, в ее геологическом и геохимическом выявлении — на всяком шагу возбуждает философскую мысль. При научном ее изучении — впервые мной систематически в науку вводимым — на всяком шагу выступают философские проблемы. Велик здесь соблазн заняться ими раньше, чем будет создана в научном учении о биосфере прочная научная основа.

Этим я объясняю и то, что так тщательно наши философы — мало сами знающие и понимающие биогеохимические явления — стараются выискать ту философскую подоплеку, которая лежит в моих работах в этой области. Они чувствуют, что в области этих явлений мы подходим к огромного — не только научного — значения проблемам, к проблемам первостепенного философского интереса. И так как они не понимают, что ученого, желающего добиться точного знания, могут прежде всего интересовать не широкие горизонты философских построений, которые всегда малодостоверны и в лучшем случае только предвидят некоторые, немногие, будущие научные открытия, что однако будет видно только тогда, когда наука подойдет своим точным путем сама к этим обобщениям — т. е. иногда через много поколений — они считают, что оставляющий эти философские толкования в стороне исследователь их обманывает. Они думают, что он пришел к философским выводам — сейчас кажущимся им неприемлемыми — и не хочет, боится, их высказать. Поэтому они занимаются розыском и вычитывают в думах ученого, занимающегося биосферой, злокозненные философские построения. Такое, с моей точки зрения, комическое и банальное, но очень неблагонадежное «новое религиозно-философское мировоззрение»

имел смелость приписать мне акад. Деборин в результате своего розыска.

Казалось бы, чего проще — подойти к этим вопросам — самому с своим методом, которому акад. Деборин верит и сделать новые научные открытия, в возможность чего этим путем он тоже верит.

Так как кругом проповедуется, что философский метод может это сделать — я задумался над этой задачей. Можно ли подойти к этим проблемам с помощью метода исследования, который пропагандирует акад. Деборин? Но в результате я пришел к убеждению, что это абсолютно (употребляю это слово, так как вопрос идет о философии, а не о науке, акад. Деборин) невозможно. Это своего рода задача о трисекции угла и т. п.

Но может быть я ошибся. Отчего не попробовать, акад. Деборин? И не найти этим методом новую научную истину, Это было бы доказательством значимости для науки данного философского метода.

Значение изучения этих явлений для философии — и очень может быть большое — лежит в будущем, когда научная основа их будет прочно создана. Оно связано с приложением к ним философских методов. Для меня это ясно.

Этим большим реальным философским интересом объясняется отчасти и тот рост интереса к биогеохимии, который идет у нас и на западе. Мне пришлось в 1923—1928 гг. в Париже, Брно, Праге и Берлине касаться этих вопросов в публичных выступлениях — в 1932 г. я вновь подошел к ним в Мюнстере и Геттингене. Я почувствовал сейчас огромную разницу. Сейчас почва подготовлена. Недавно, в мае, один из самых выдающихся современных химиков проф. фон Гевеши из Фрейбурга, на съезде Бунзеновского общества в Мюнстере, ярко, говоря о биогеохимии, указал на причину этого интереса. Именно в биогеохимии — говорил он — в настоящее время науки о жизни впервые тесно соприкасаются с науками об атомах, т. е. с той областью научных исканий, в которой идет передовая научная работа человечества нашего времени. В этом большое современное и будущее значение биогеохимии. Как раз здесь через ее проблемы науки о жизни соприкасаются с теми проблемами, которые вызывают то великое брожение мысли, которое создает сейчас у физиков интерес к философии и которое для меня проявляется в великом взрыве научного творчества — а акад. Деборину кажется кризисом науки, правда, он прибавляет, по старинке, «буржуазной». Этот термин половины XIX столетия в этой научной области для первой четверти XX века кажется для ученого ярким анахронизмом. Надо это наконец понять.

В результате своего розыска акад. Деборин приходит к заключению, что я мистик и основатель новой религиозно-философской системы, другие меня определяли как виталиста, неовиталиста, фидеиста, идеалиста, механиста, мистика.

Я должен определенно и решительно протестовать против всех таких определений, должен протестовать не потому, чтобы я считал их для себя обидными, но потому, что они по отношению ко мне ложны и легкомысленно высказаны людьми, говорящими о том, чего они не знают и углубиться во что они не желают. Углубиться, конечно, не легко. Для этого необходим большой, тяжелый труд. Легче судить по методологическим трафаретам. Но по готовым трафаретам в новой, слагающейся, научной области неизбежно придешь к ложному выводу.

Я философский скептик. Это значит, что я считаю, что ни одна философская система (в том числе и наша официальная философия) не может достигнуть той общеобязательности, которой достигает (только в некоторых определенных частях) наука.

Поэтому, очевидно, я не могу быть каким бы то ни было последователем или представителем философских течений, выше указанных и иных.

И в то же самое время я, как философский скептик, могу спокойно отбросить без вреда и с пользой для дела в ходе моей научной работы все философские системы, которые сейчас живы. Могу также оставить в стороне философские проблемы или философские стороны научных проблем, которые на каждом шагу проявляются при научном изучении биосферы, поскольку к ним нельзя подойти научным путем.

Эти философски значимые проблемы возникают для меня все больше и больше по мере того, как я углубляюсь в эту область знания. Но я могу их оставить — вне указанных рамок — в стороне, так как знаю, что никогда не смогу достигнуть при философском изучении той достоверности, общеобязательности решения, которое дает мне научное эмпирическое обобщение и математический анализ явлений.

Но философский скепсис, конечно, не есть положительное философское построение.

И он дает одностороннее впечатление о том великом создании человеческого гения, каким является философская мысль, которая и у нас и в индийском центре цивилизации достигла сейчас такого глубокого развития.

Не даст ли того, чего не дает отдельная философия — всякая взятая отдельно без исключения — совокупность всех их, в данный момент суще-

ствующих? Или всех существовавших в тысячелетнем историческом ходе философской мысли?

Это интересная философская проблема, но она лежит вне поля моего исследования.

Для меня ясно лишь одно — в научном изучении биосферы лежит корень решения многих не только научных, но и философских касающихся человека проблем; современный взрыв научного творчества, особенно интенсивный в области наук астрономических и наук об атомах, с которыми биогеохимия связывает науки о жизни, должен привести к новому расцвету философской мысли. «Кризис» заключается в том, что все старые философские построения не охватывают новое, быстро растущее научное описание реальности.

Как всегда в такие периоды, к тому же всегда связанные с могучим пересозданием человеческой социальной жизни, а сейчас с социальным переустройством на всем протяжении планеты, должны создаться новые философские системы, понимающие язык и мысль новой науки.

И для ученого особенно важными и плодотворными будут те из них, которые связаны с реалистическим пониманием мира.

Прага
Июль 1932

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ НА КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ АКАД. В. И. ВЕРНАДСКОГО

А. М. ДЕБОРИНА

В ответ на мою статью «Проблема времени в освещении акад. Вернадского» почтенный ученый разразился рядом «тонких намеков» насчет преследуемых моей статьей побочных целей — я-де занимаюсь розысками и стремлюсь затруднить его работу в пределах СССР — и прочими «сумасшедшими пустяками». Есть обвинения, которые не заслуживают ответа — так они бессмысленны, нелепы.

Акад. Вернадский ярый поборник свободы научного исследования. Но этой свободы он требует для себя. Стоит только выступить марксисту и коммунисту с критикой его взглядов, как у нашего почтенного академика начинают сыпаться как из рога изобилия обвинения в розыске и т. п. смертных грехах. Это очень интересное с точки зрения «общественной психологии» явление мы оставим, впрочем, здесь в стороне и позволим себе только заметить нашему горячему защитнику свободы: а не справедливо ли будет предоставить чуточку свободы и другим для защиты того мировоззрения, которое они считают правильным?

Еще древние говорили: гнев дурной советник. Написанная в сильном гневе и раздражении статья акад. Вернадского, хотя и изобилует крепкими выражениями, крайне слаба в своей аргументации. Посудите сами. Акад. Вернадский, стремясь «забаррикадировать» себя от критики философа, заявляет, что я совершил подлог, подсунув ему философский анализ проблемы времени, в то время как он задался целью дать чисто научный анализ проблемы времени. Разграничение «сфер влияния» между наукой и философией, по мысли акад. Вернадского, должно быть таково: философия не должна совать свой нос в науку, а ученые не должны заниматься философией. Это слишком элементарное разрешение вопроса о взаимоотношении

между философией и наукой. Правда, акад. Вернадский не смог долго удержаться на этой позиции и через несколько страниц, противореча самому себе, он проводит другую точку зрения. Но, повидимому, с чисто научной точки зрения, как ее понимает акад. Вернадский, логические противоречия служат для украшения стиля ученого. Если бы мы задались целью подвергнуть детальному анализу его статью, то это потребовало бы слишком много времени и места: так много в ней противоречий и неправильных утверждений. Но на некоторых его суждениях придется остановиться.

Стремясь посрамить своего противника, акад. Вернадский «дружески» журит меня за то, что я «недобросовестно» вывожу из его научной статьи его философское мировоззрение. Повидимому акад. Вернадский придерживается мнения, что научные взгляды ученого никакой связи с его философскими взглядами, с его философским миросозерцанием не имеют. Должен сознаться, что это открытие для меня ново. Век живи, век учись.

Исходя из такой точки зрения, акад Вернадский пишет: «в научной статье обычно (как и в моей) нет философского содержания в смысле определенного положительного философского учения. А раз его нет, то и нельзя его при добросовестной мысли найти». Значит, только «недобросовестная мысль», только злая воля могла толкнуть меня на то, чтобы приписать акад. Вернадскому, на основании его научной статьи, определенные философские взгляды. Он достаточно снисходителен к бедным философам, чтобы позволить им питаться амброзией и нектаром с его научного стола, но пусть они только воздержатся от критики. «Философски можно использовать приводимые в научной статье выводы или обобщения... Можно было бы оценивать затрагиваемые в статье нерешенные философские проблемы, но никакого отношения к миросозерцанию автора статьи, очевидно, эти проблемы не имеют». Выходит так, что ученый только «затрагивает»—на какой предмет?—философские проблемы, но они никакого отношения к его миросозерцанию не имеют... И только пользуясь «своеобразным критическим аппаратом акад. Деборина», как изящно выражается акад. Вернадский, можно искать и раскрыть философское миросозерцание в научной работе ученого.

Мы готовы были уже покаяться в совершенном нами по отношению к акад. Вернадскому преступлении, мы были уже готовы в наивности своей согласиться с акад. Вернадским, что у него нет никакого мировоззрения, как он поспешил нам на помощь и по-дружески выручил нас из беды.

«Я не принадлежу к числу таких ученых (у которых нет философского мировоззрения. *А. Д.*) и имею совершенно определенное философское миро-

воззрение, которое мне дорого и которое мною продумано в течение моей долгой жизни. Я нисколько не сомневаюсь, что если правильно и критически философ прочтет мои работы последних 16 лет, он ясно увидит, что оно красной нитью проходит через мою научную работу».

При всем моем уважении к акад. Вернадскому, как к крупному ученому, я должен сказать, что логика не составляет сильную его сторону. Правда, он может мне возразить, что логика дисциплина философская и, стало быть, для ученого «чуждая» и не обязательная, но сомневаюсь, чтобы читатель с ним согласился.

Итак, я недобросовестно «вывел» из его научной статьи его философское мировоззрение, которого в ней нет, несмотря на то, что его философское мировоззрение красной нитью проходит через его научную работу. Таким образом, баррикада, воздвигнутая нашим маститым ученым для защиты ученого от философа, одним движением его руки снесена. Защита пала!

Каково же философское мировоззрение акад. Вернадского? Мы его охарактеризовали как эклектическое; сам же акад. Вернадский теперь нам любезно разъяснил, что мы грубо ошиблись и что он стоит на почве философского скепсиса. По этому поводу мы можем сказать, что акад. Вернадский — личность многогранная и много вмещающая. Считаясь с его указанием, мы охотно соглашаемся, что он не только эклектик, но и скептик. При этом надо заметить, что между эклектизмом и скептицизмом не существует непроходимой пропасти. Если скептицизм означает одинаково недоверчивое отношение ко всем философским построениям, если он означает сомнение в возможности истинного познания вообще, то все философские учения имеют одинаковую ценность, — как положительную, так и отрицательную. Именно потому, что ни одна философская концепция не является объективно истинной, скептики часто приходят к мысли, что все они одинаково являются истинными. Так скептицизм при определенных условиях переходит в эклектицизм.

Акад. Вернадский является типичным представителем такого эклектического скептицизма или скептического эклектицизма. Чтобы не быть голословным, приведем следующее место из его статьи.

«Не даст ли того, чего не дает отдельная философия — всякая взятая отдельно без исключения — совокупность всех их, в данный момент существующих. Или всех существовавших в тысячелетнем историческом ходе философской мысли». Акад. Вернадский обиделся за то, что я назвал его эклектиком. Но разве эта цитата не подтверждает полностью мою правоту?

Если эклектицизмом не является стремление объединить все философские учения, то тогда я не знаю, что же такое эклектицизм? А между тем акад. Вернадский отвергает мою характеристику его философского мировоззрения как эклектического. Что иное, кроме эклектической каши, может получиться от объединения, напр., философского мировоззрения Маркса с философским учением Платона? Как представляет себе акад. Вернадский объединение («совокупность», говорит он) всех философских учений, «существовавших в тысячелетнем историческом ходе философской мысли», мы понять не в состоянии. Предложению акад. Вернадского нельзя отказать в оригинальности, но не все, что оригинально, может претендовать на философскую или научную глубину.

Акад. Вернадский не хочет понять того, что всякое философское мировоззрение является историческим продуктом, выражением своего времени и вполне определенной классовой идеологией. Подобно тому, как нельзя примирить враждебные общественные классы — буржуазию с пролетариатом, например, так нельзя объединить идеализм с материализмом, — эти враждебные философические мировоззрения.

По поводу высказанной мною несколько лет тому назад мысли о переживаемом современной наукой кризисе, выражающемся в разрыве между огромным эмпирическим материалом и устарелым философским мировоззрением, — идеализмом, позитивизмом и проч., — не способным охватить новые достижения современной науки, акад. Вернадский не раз высказывал свое неудовольствие. Эта мысль, впрочем, принадлежит не мне. Она была детально обоснована Лениным, доказывавшим, что только диалектический материализм дает широкую теоретическую основу для современного естествознания. Акад. Вернадский не согласен с нашим мнением насчет кризиса, хотя, как это ни странно, в последней его статье встречаемся с формулировкой, для него новой и необычайной. Он соглашается, что наука переживает «кризис» (кризис в ковычках); он видит теперь причины «кризиса» в том, что «все старые философские построения не охватывают новое, быстро растущее научное описание реальности». Однако, на ряду с кризисом, у акад. Вернадского фигурирует и старая оригинальная его идея «взрыва». Современное великое брожение мысли, говорит он, «проявляется для меня в великом взрыве научного творчества, а акад. Деборину кажется кризисом науки, правда, он прибавляет, по старинке, ,,буржуазной‘‘». Далее, он продолжает: «Этот термин (какой? кризис или «буржуазный»? *А. Д.*) половины XIX столетия в этой (в какой? *А. Д.*) научной области для первой четверти XX века кажется для ученого ярким анахронизмом. Надо это наконец понять».

Говоря об «этом термине», в «этой научной области», являющемся для ученого «ярким анахронизмом», акад. Вернадский, повидимому, имеет в виду термин «кризис науки». Но мы уже показали, что и сам акад. Вернадский в той же статье заговорил о кризисе (хотя бы и в кавычках), причем изображает этот кризис как противоречие между новым, быстро растущим научным описанием реальности и старыми философскими построениями.[1] Акад. Вернадский, говоря между нами, сделал мне маленькую уступку своим признанием наличия кризиса. Пусть это обстоятельство послужит нам хоть некоторым «утешением».

Признав в одном месте наличие кризиса и попытавшись даже дать его характеристику, он в другом месте той же статьи, противореча самому себе, отвергает наличие кризиса и подчеркивает, что современное великое брожение мысли только Деборину кажется кризисом науки. С его же точки зрения существует не кризис науки, а «великий взрыв научного творчества». Что же эта за идея «взрыва», постоянно встречаемая в работах акад. Вернадского? В третий раз за последние три тысячелетия, пишет он, человечество переживает необычайный подъем научного творчества. Эти подъемы научного творчества являются «проявлением какой-то силы, связанной с духовной творческой энергией человека». «Если нужна для нашего ума какая-нибудь аналогия этого природного процесса, мимо которого миллионы людей обычно проходят, его не замечая, этой аналогией ей может быть взрыв».

«Взрывы научного творчества, повторяющиеся через столетия, указывают, следовательно, на то, что через столетия повторяются периоды, когда скопляются в одном или немногих поколениях, в одной или многих странах, богато одаренные личности, те, умы которых создают силу, меняющую биосферу. Их нарождение есть реальный факт, теснейшим образом связанный со структурой человека, выраженной в аспекте природного явления. Социальные и политические условия, позволяющие проявление их духовного содержания, получают значение только при его наличии».

«Мы не знаем пока, почему, как и отчего происходит такое нарождение талантливых людей, орудий научной мысли, и их скопление в близких

[1] В своей статье «Проблема времени в освещении акад. Вернадского» мы писали о кризисе, что он выражается «в резком разрыве между великими достижениями науки и враждебным ей мистически-идеалистическим мировоззрением и методом исследования» (См. ИМЕН АН. 1932 г., № 4, стр. 568). Таким образом, акад. Вернадский несколько приблизился к нашей точке зрения. Мы видим выход из кризиса, поскольку речь идет о его теоретической стороне, — в повороте к философии диалектического материализма, акад. же Вернадский питает надежду на нарождение «новых философских систем, понимающих язык и мысль новой науки».

поколениях, отсутствие их в других. Мы должны принимать их за свойство нашей расы, проявление ее природы».[1]

Эта оригинальная философия истории науки, в основе которой лежит идея взрыва научного творчества, исходит из мысли о специфических свойствах «нашей расы» и является по существу чисто биологической теорией истории науки и, повидимому, исторического процесса вообще. Мы не намерены заняться критикой этой теории. Достаточно только указать на нее, чтобы читатель сам признал ее несостоятельность. Нет ни одного великого научного открытия, которое бы не было порождено потребностями общественного развития. Закономерности развития научной мысли следует искать не в свойствах нашей «природы», «нашей расы», а в особенностях развития общественных отношений. Однако останавливаться дальше на этом вопросе нет надобности. Нам важно было лишь указать, в чем смысл идеи «взрыва», которая акад. Вернадским противопоставляется «кризису». Ко всему сказанному по вопросу о кризисе современной научной и философской мысли в странах капитализма следует прибавить, что основная причина ее коренится в кризисе капиталистической системы в целом.

В своей борьбе с «философами» акад. Вернадский поднимается на большую «теоретическую высоту». Наши философы чувствуют, пишет он, — акад. Вернадский настолько милостив, что не отказывает «нашим философам» в способности чувствовать, отказывая им в способности мыслить, — что область жизни возбуждает философскую мысль и ставит философские проблемы. Но так как ученый не спешит делать философские выводы из своих научных построений, то они думают, что исследователь их обманывает. «Они думают, что он пришел к философским выводам и не хочет, боится их высказать. Поэтому они занимаются розыском и вычитывают в думах ученого, занимающегося биосферой, злокозненные философские построения. Такое с моей точки зрения комическое и банальное, но очень неблагонадежное «новое религиозно-философское мировоззрение» имел смелость приписать мне акад. Деборин в результате своего розыска».

Вот какими простачками и вместе с тем злокозненными существами изображает акад. Вернадский «наших философов», которые в наивности своей будто «думают», что им открыт «философский камень», но что он держит его в секрете, обманывает народ, не желая или боясь блеснуть перед чернью ослепительным светом новой истины. Стремясь во что бы то ни стало вырвать из рук нового Прометея великую тайну, «наши философы» не останавливаются перед всеми видами провокации, прибегая к чтению

[1] В. И. Вернадский. Мысли о современном значении истории знаний, 1927, стр. 6, 7 и 8.

в сердцах, к розыскам, к подбрасыванию подложных документов и проч.

Спешу успокоить акад. Вернадского. «Наши философы» не подозревают его в сокрытии великой философской тайны и в намерениях обманывать народ. Напротив того, я считаю, что никаких тайн у него нет и никаким философским камнем он не обладает. И напрасно он убеждает нас в том, что он оставляет в стороне всякие философские толкования, интересуясь лишь научной стороной занимающих его проблем. Его философское мировоззрение в значительной степени руководит его научными интересами и исследованиями. Заявил же он сам, как мы видели, что через всю его научную работу красной нитью проходит «совершенно определенное философское мировоззрение», которое ему дорого и которое им продумано в течение его долгой жизни. Определяя свое философское мировоззрение как философский скептицизм, акад. Вернадский подчеркивает только одну сторону своего мировоззрения, которая, однако, далеко не исчерпывает всего богатства его содержания.

Мы выше, как бы мимоходом, ознакомились с одной существенной частью его мировоззрения — с его оригинальной теорией истории науки, являющейся выражением его более широкого учения о свободной творческой духовной личности. Теперь мы имеем возможность затронуть и другой вопрос — вопрос о соотношении религии, философии и науки, являющихся формами проявления свободной духовной человеческой личности. Акад. Вернадский видит в религии (как и в философии и науке) вечную форму проявления духовной природы человеческой личности, — бесконечной и бессмертной. Ни одна из сторон человеческой личности никогда не может исчезнуть. Все эти стороны или проявления человеческого духа, говорит акад. Вернадский, неразрывно связаны между собою.

Научная деятельность не существует вне одновременного существования религии и философии. «Рост науки неизбежно вызывает в свою очередь необычайное расширение границ философского и религиозного сознания человеческого духа; религия и философия, восприняв достигнутые научным мировоззрением данные, все дальше и дальше расширяет глубокие тайники человеческого сознания».[1]

«Бессмысленными мечтаниями» надо считать мнения тех, которые полагают, что наука может когда-либо заменить религию. Как христианство не одолело науки в ее области, так и наука не сможет сломить хри-

[1] В. Вернадский. Очерки и речи, II, 1922, стр. 23.

стианскую или иную религию». «Религиозные искания Будды или Христа остаются незыблемыми и живыми теперь, как были тысячу лет раньше».[1]

Духовная личность свободна. Сущность ее составляет разум, который один руководит ею во всех ее проявлениях и действиях.

«Мистика является одной из самых глубоких сторон человеческой жизни. Если мы всмотримся в жизнь мистиков, мы увидим, что они жертвуют для мистических настроений всем. В жизни и в философском мышлении С. Н. Трубецкого акад. Вернадский видит «живой пример глубокой гармонии обычно разделенных проявлений духовной жизни человека—мистических элементов веры, философского мышления и научной мысли».[2] Между этими тремя сторонами человеческой личности нет несогласимых противоречий; они «рождаются лишь при подавлении какой-нибудь одной его стороной других ее проявлений».

Мы воздерживаемся от дальнейшего изложения взглядов акад. Вернадского. Приведенных цитат вполне достаточно для того, чтобы читатель мог по достоинству оценить «остроумный» прием, к которому прибег акад. Вернадский, заявив, что теологические вопросы интересуют не его, а Деборина, что я ему приписал трафаретно-мистическое миропредставление, не сознавая «насколько архаичным оно должно представляться ученому, почти 50 лет непрерывно научно работающему над основными вопросами точного знания». Но ведь смысл моей статьи к тому и сводится, чтобы показать, насколько архаично философское миропредставление ученого, работающего над основными вопросами точного знания.

Поборник «свободы духовной личности», во избежание неприятностей, связанных с обсуждением и критикой его философских взглядов, не находит иного средства для торжества истины, как запрещение представителям философии критиковать ученых. «Ученые,—пишет он,—должны быть избавлены от опеки представителей философии. Этого требует польза дела, государственное благо». «Я считаю вхождение в нашу научную мысль употребляемых им (т. е. мною. *А. Д.*) приемов философской и теологической критики (акад. Вернадский, повидимому, хотел сказать: критики его, Вернадского, философских и теологических взглядов. *А. Д.*) вредным и опасным явлением, ослабляющим научную работу нашей страны в мировом ее выявлении».

«Наши философы» поистине вредный и опасный народ. Они не соглашаются насчет существования реальностей вне времени и пространства, на чем настаивает акад. Вернадский. Они осмеливаются возражать (это

[1] Акад. В. Вернадский. Очерки и речи, II, 1922, стр. 21.
[2] Там же, стр. 53.

называется на языке акад. Вернадского «розыском») против теологических взглядов акад. Вернадского, против его теории духовной личности, которую он наделяет бессмертием, против его биологической теории истории науки, против его учения о свойственной природе человека религиозности и проч. Как же после этого не потребовать во имя «государственного блага» и «свободы духовной личности» избавления ученых «от опеки» представителей философии. Неужели акад. Вернадский не понимает, в какое смешное положение он себя ставит нелепыми разговорами об «опеке» и вредных и опасных деяниях философов, единственное преступление которых состоит в том, что они высказывают взгляды, не совпадающие с взглядами акад. Вернадского?

Акад. Вернадский ставит ряд реторических вопросов, смысл которых сводится к следующему: как мог я думать, что среди научно работающих представителей точного знания могут существовать в XX веке такие монстры, каким я его в полете своей философской фантазии рисую. Этот вопрос я себе тоже задавал, но разгадать эту загадку я предоставляю «духовной личности» акад. Вернадского, ибо мое объяснение покажется ему вредным и опасным и, главное, слишком материалистичным. Ведь известно, что «наша философия», к которой акад. Вернадский относится с явным раздражением—как хорошо было бы запретить ее!—судит обо всем согласно определенным «методологическим трафаретам», как выражается наш глубокий знаток марксизма.

«Так как кругом проповедуется,—пишет акад. Вернадский,—что философский метод может сделать новые научные открытия (научные открытия делают, конечно, люди при помощи определенного метода, а не метод сам по себе. *А. Д.*), то я задумался над этой задачей». «Можно ли подойти к этим проблемам с помощью метода исследования, который пропагандирует акад. Деборин. Но в результате я пришел к убеждению, что это абсолютно... невозможно. Это своего рода задача о триссекции угла и т. п.

Но может быть я ошибся. Отчего не попробовать акад. Деборину и не найти новую научную истину. Это было бы доказательством значимости для науки данного философского метода».

Эти строки, которые рассчитаны на то, чтобы меня окончательно сразить, далеко не говорят в пользу акад. Вернадского. О чем собственно идет речь? Не более, не менее, как о марксизме, о методе и мировоззрении диалектического материализма, который у акад. Вернадского фигурирует как «философский метод». И вот не шутите! Акад. Вернадский «задумался» над этим методом, а «задумавшись», он пришел к убеждению, что этот метод абсо-

лютно не годен. В самом деле, разве не очевидны, напр., все преимущества биологической теории истории науки перед марксо-ленинской теорией исторического материализма. Стоит только «задуматься» над этим вопросом, чтобы сразу решить, что теория исторического материализма абсолютно непригодна. Столь же непригоден научный метод марксизма в применении к другим проблемам. Однако, от такого серьезного ученого, как акад. Вернадский, мы в праве требовать, чтобы свой суровый приговор над марксизмом он хоть сколько-нибудь научно обосновал. Но сделать это он считает, очевидно, ниже своего научного достоинства. Они там «кругом проповедуют», а я «задумался» и сразу пришел насчет их «проповеди» к абсолютно отрицательному выводу. Какое барское высокомерие! И он, уверенно «задумавшись», заявляет, что при помощи марксистского метода новую научную истину не найти!

Вот подите же, что значит быть «свободным от науки» и «мало знать». Кстати, еще Гераклиту и Демокриту было известно, что многое понимать важнее, чем много знать. Ведь мы то были до сих пор убеждены, что Маркс, Энгельс и Ленин открыли при помощи своего метода не одну научную истину, а целый ворох таких истин, что они даже совершили переворот в области науки. А тут оказывается, что при помощи «проповедуемого кругом» метода не открыть ни одной, хотя бы самой тощей истины. Нет. Не достаточно мимоходом задумываться над такими вопросами. Их следует долго и серьезно изучать.

В заключение два слова о приписываемых мне акад. Вернадским злокозненных намерениях затруднить или сильно помешать его научной работе в пределах Союза. По этому поводу я могу сказать, что он глубоко ошибается. В противоположность ему, требующему «избавить ученых от опеки философов», я очень далек от того чтобы требовать избавления философов от критики или «опеки» ученых. Я критиковал его философские и обще-теоретические взгляды, пользуясь правом всякого гражданина Советской Республики свободно высказывать свои взгляды и защищать свое мировоззрение, нисколько не претендуя на роль «опекуна» по отношению к кому бы то ни было. В своей критике я не касался его конкретной научной работы в области биогеохимии, где у акад. Вернадского имеются крупные заслуги. Считая его «эмпирическую» научную работу весьма важной и ценной, я, разумеется, не мог и не могу иметь тех «дьявольских» намерений, какие мне приписывает акад. Вернадский.

Я имею только смелость думать, что если бы акад. Вернадский не отнесся так пренебрежительно и высокомерно по отношению к «нашей фило-

софии», а занялся бы серьезным изучением классиков марксизма-ленинизма, то, быть может, он отказался бы от своих архаических взглядов, мешающих его научной работе, и, усвоив метод диалектического материализма, нашел бы в нем лучшее орудие научного исследования.

Что же касается данной мною в статье «Проблема времени в освещении акад. Вернадского» общей оценки его взглядов, то и после его ответа у меня нет никаких оснований для ее пересмотра, тем более, что его «критические замечания» только подтвердили высказанные мною в указанной статье суждения.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiqus et naturelles — Отделение математических и естественных наук

К МИНЕРАЛОГИИ ТОПАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ВОЛЫНИ

Л. Л. ИВАНОВА

(*Представлено академиком* А. Е. Ферсманом)

I. ТОПОГРАФИЯ

Образцы минералов и горных пород, послужившие материалом для этой статьи, были доставлены мне начальником топазовой партии В. П. Амбургером с разведочных канав и шурфов с. Писаревки Володарского района, колонии Викторинки и Остронь того же района и кол. Александрии Коростенского района на Волыни.

Это болотистое лесистое пространство, слегка холмистое, с разницей высот между дном долинок и вершинами холмов до 10 м, иногда с выходами коренных кристаллических пород на вершинах холмов в виде развала валунов.

II. ПЕТРОГРАФИЯ

1. ОПИСАНИЕ ПОРОД

Преобладающей породой местности является розовый гранит «коростенского типа» как он установлен проф. Н. И. Безбородько в его работе «Граниты Волыни и их пегматиты» (№ 1, 4).[1] С востока примыкает область развития габбровых пород, а с запада — серого гранита (см. карту, фиг. 1, на стр. 423).

Макроскопически это мелко или среднезернистый гранит, более или менее ясно выраженного порфирового сложения. Последнее обусловлено выделением более крупных, до 10 мм в поперечнике, не вполне идиоморфных зерен ортоклаза среди средне- или мелкозернистой гранофировой массы.

[1] Номер в скобках указывает на очередной номер списка литературы, цифра— на страницу в цитируемой работе. Номер в скобках без второй цифры указывает на № образца и шлифа.

Цвет породы большею частью светло-или темнорозовый, часто с желтоватым оттенком, реже кирпично-красный. Изредка наблюдается серая окраска (№ 647), почти до белой. Образцы гранита большею частью в степени сильного выветривания.

Микроскопически или под бинокулярной лупой наблюдаются следующие детали.

Полевой шпат в виде порфировых выделений овальной формы розового цвета, иногда прозрачный, стекловатый, типа адуляра. Встречается такая зональность: ядро белое, розовая оторочка, гранофировая внешняя зона с обильным кварцем (№ 522). Один образец (№ 1194) дает повторную зональность: а) ядро розовато-белое с пойкилитовым кварцем, б) белая зона, в) гранофировая зона узкая, г) опять розовая зона, д) еще гранофировая.

Кварц в виде червеобразных или округлых зерен серого, а иногда (№№ 607, 621, 1172) очень темного цвета. Изредка наблюдаются бипирамидальные кристаллы кварца, как в кварцевых порфирах.

Биотит большею частью в небольшом количестве, но иногда его и много (№№ 490, 607, 1229).

Черная роговая обманка с прекрасной спайностью наблюдается в гранитах с канав разведки на половине расстояния между Писаревкой и Викторинкой (канавы №№ 27—34).

Основная масса породы мелко-или среднезернистая, гранофировая, темнее полешпата.

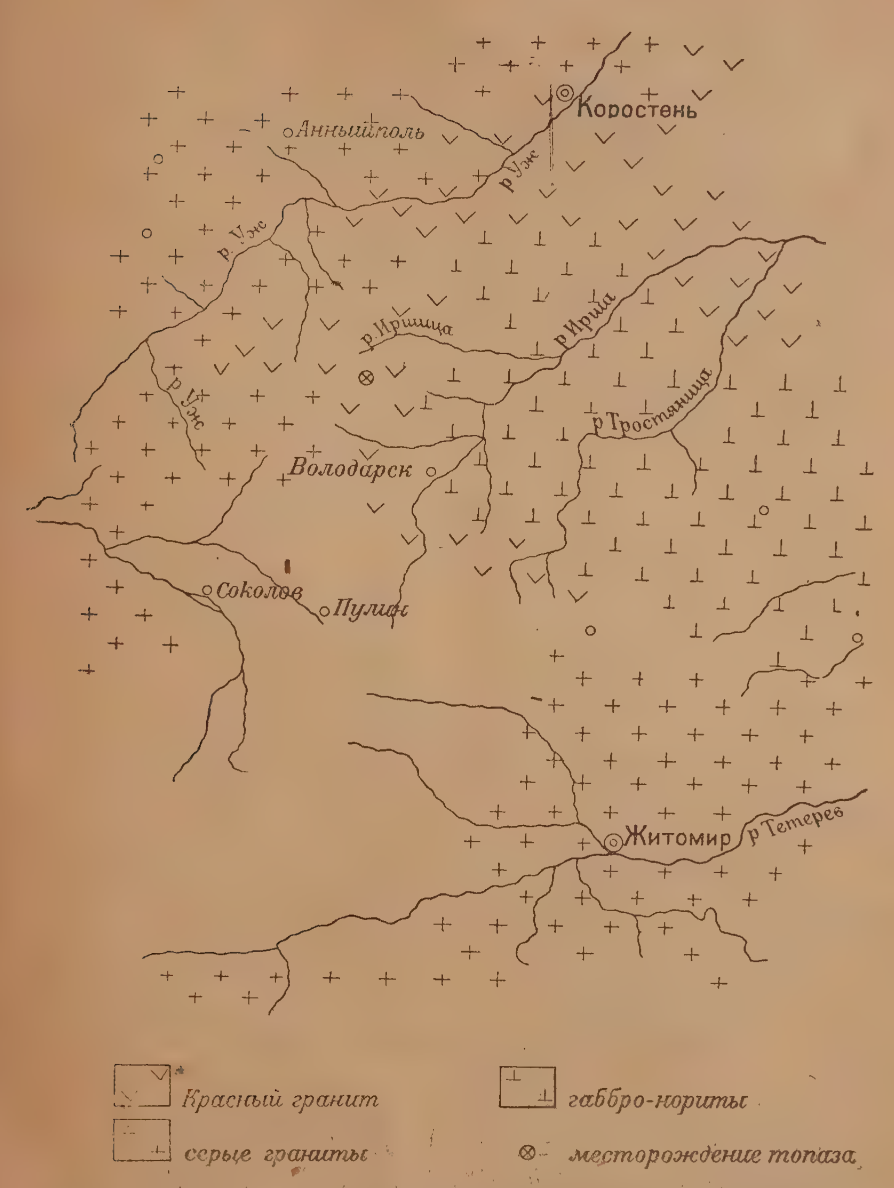
В граните, в двух образцах (№№ 98 и 141), встречены миаролитовые пустотки с кристаллами дымчатого горного хрусталя, адуляра и жильбертита (?).

Под микроскопом еще лучше проявляется гранофировая структура прорастания кварцем полешпата. При этом часто наблюдается пойкилитовая структура, причем кварц прорастает полешпат в виде капель, угасающих одновременно.

Полевой шпат очень богат включениями. Преобладающим является ортоклаз. Затемнение на (001) равно 0°, на (010) — 5° (№ 860). Часто наблюдается ортоклаз-пертит (№ 653 и др.), переходящий иногда в волокнистое строение. Большею частью ортоклаз сильно разрушен.

Микроклин наблюдается нередко, с углом затемн. ＋ 15° и 5°. Встречается и микроклин-пертит (№ 68).

Микропегматит наблюдается один раз (№ 430).



Фиг. 1. Петрографическая карта части Волыни по С. В. Бельскому (см. список литературы, № 25).

Кварц очень богат включениями. Встречается в виде мирмекита в ортоклазе. В одном шлифе (№ 267) встречено зерно кварца, окруженное каймой зеленовато-желтого минерала без плеохроизма (авгит ?), с аггрегационной поляризацией, пронизанное сеткой лейкоксена.

Биотит в виде гексагональных табличек. Иногда на месте его желтоватая масса с округлыми зернами магнетита (притягиваются магнитом) и с иглами рутила (№ 15).

Плагиоклаз наблюдается почти всегда, и иногда в значительных количествах, кислый, с показателем преломления больше канадск. бальз. (№ 522), изредка в мелких кристаллах в ортоклазе.

Роговая обманка, как указано было выше, макроскопически черная, п. м. дает угол затемнения около 20° и плеохроизм от темного зеленовато-желтого до почти полной абсорбции. Перед паяльной трубкой легко плавится, давая сильно магнитный королек и окраску пламени натрием — щелочной амфибол.

Пироксен встречен один раз (№ 68) в виде зеленоватых иголочек. См. также раньше при кварце.

Циркон в виде октаэдрических кристаллов или зерен на месте разрушенного биотита (№ 68 и 473).

Редко рутил в виде игольчатых кристаллов.

Магнетит очень редко в виде отдельных кристаллов (№ 16) или зерен (№ 68 и 437). Также на месте разрушенного биотита.

Ильменит в виде зерен на месте какого-то разрушенного минерала (№ 99 и 439) с сильным пожелтением вокруг, хотя рядом совершенно свежий биотит.

Таким образом, макро-и микроскопические наблюдения говорят за гранит коростенского типа, хотя изучение отдельных минералов в шлифах сильно затрудняется значительной выветрелостью образцов.

Некоторые образцы дают не столь резко выраженный коростенский тип, со слабо выраженной гранофировой и порфировой структурой, приближаясь к мелкозернистым обычным гранитам, как образцы №№ 266, 267, 409.

Гранит образца № 432 настолько выветрел, что о характере его говорить трудно.

Есть и несколько отличные от обычного коростенского типа граниты, а именно:

Викторинка, канава № 8, образец № 599. Гранит темнокрасного цвета среднезернистый, под бинокулярной лупой — мясо-красный ортоклаз, желто-

зеленоватый плагиоклаз, темносерый кварц, много биотита в неправильных листочках.

П. м. — ортоклаз преобладает, сильно разрушен; микролина и плагиоклаза очень мало. На федоровском столике ортоклаз дает:

Карлсбадский двойник д. о. ⊥ (100); Ng — 90°, Np — 16°, Nm — 74°; 2V = + 76°.

Микроклин по спайности (001): Ng — 83°, Np — 83°, Nm — 16°; 2V = + 90°, с двойниковой решеткой и без нее. Плагиоклаз с широкими двойниковыми полосами, но ближе установить № не удалось.

Биотит местами показывает разъедание кварцем, причем биотит имеет форму „лейсты", т. е. раннего выделения, чем и объясняется его вторичное разъедание. Наблюдается переход биотита в бесцветный минерал с большими двупреломлением, с выделением игольчатого темного минерала (рутила ?).

Магнетит в большом количестве в виде неправильных зерен, частью перешедший в лимонит.

Значительное количество флюорита. Зерна бесцветные, до 0.8 мм в поперечнике, изредка в виде правильного октаэдра, б. ч. сильно разъедены. Иногда внутри зерен флюорита включены неправильные зерна кварца.

Апатит в мелких круглых зернах.

Одно зерно циркона в кварце.

Структура породы гипидиоморфно-зернистая.

Кол. Острожь, образец (№ 1022). Гранит, совершенно подобный предыдущему. Но красноватый кварц и розовый полешпат образуют мелкую гранофировую массу, на фоне которой выступают аггрегационные пятна биотита.

П. м. — ортоклаз-пертит волокнистый, кварц, биотит, структура гранитовая. Наблюдается разложение биотита с обесцвечиванием и выделением железа в виде магнетита.

На федоровском столике ортоклаз дал такие цифры:

1) спайность по (001): Ng — 90°, Np — 82°, Nm — 5°, 2V = — 68°.

2) Ng — 89°, Np — 79°, Nm — 12°, 2V = — 72°.

На волокнистую структуру ортоклаза в гранитах Волыни указывает Морозевич (№ 3, 881).

Пеликанитовый гранит представляет из себя образец из к. Писаревки, канава № 13. Это мелкозернистая порода светлосерого почти белого цвета. Темносерые мелкие зерна кварца окружают зерна серебристобелого полешпата, сильно серицитизированного, и пеликанита. Порода

пересечена сливочно-белыми жилками пеликанита около 5 мм толщиной.

Под бинокул. лупой видно, что полешпат серицитизирован или целиком или частично пятнами. Зерна пеликанита окружены мелкими округлыми или червеобразными зернами кварца. Иногда по периферии зерна пеликанита есть остатки белого серитицизированного полешпата.

П.м.обнаруживается значительное количество зерен титанистого железняка с выделениями лейкоксена. Зерна кварца чрезвычайно обильны газовыми включениями в виде дорожек. Полешпат-ортоклаз, обычно не пертитизированный. Слабо просвечивающая пеликанитовая масса.

2. ХИМИЯ ПОРОД

Для выяснения химического характера гранитов топазового месторождения были произведены три анализа образцов породы в лаборатории Днепропетровского исследов. института физической химии химиком Е. Кастнер. Были проанализированы: 1) образец № 599, канава № 8 из Викторинки, темнокрасный среднезернистый гранит, 2) образец № 598, оттуда же такой же гранит серый, 3) образец № 1022, кол. Остронь, гранит красный среднезернистый, похожий на № 599. Эти граниты были взяты как уклоняющиеся от обычного коростенского типа.

Результаты анализа таковы:

	№ 598	№ 599	№ 1022	Средн. биот. гранит по Чирвинскому (№ 4).
SiO_2	71.70	73.02	76.23	71.66
Al_2O_3	13.30	12.35	12.27	14.47
Fe_2O_3	4.33	4.45	3.45	2.67
CaO	1.77	2.20	1.90	1.97
MgO	0.62	0.57	0.38	0.87
Na_2O	1.38	0.33	1.78	4.12
K_2O	6.39	6.91	3.64	3.04
Пот. при пр.	0.67	0.51	0.37	0.78
	100.16	100.34	100.02	99 58

Как показывают цифры анализа, уклонения наблюдаются во втором анализе в количестве окиси натрия, в сторону его уменьшения, остальные цифры более или менее совпадают. Это уменьшение натрия следует объяснить уменьшением плагиоклаза в этом граните. То, что параллельно не уменьшилось количество кальция, объясняется наличием в породе флюорита.

Пересчет по данным анализа на минералы дал следующую картину. При пересчете за исходный минерал, по окиси магния, был взят биотит,

согласно анализу проф. Н. И. Безбородько, приведенному как средний, по которому он вычислял минералогический состав коростенского гранита (№ 1, 6).

	№ 598	№ 599	№ 1022	Безбор.
Кварц	34.94	39.42	47.24	27.28
Ортоклаз	34.70	41.00	19.34	36.26
Альбит	11.70	3.58	15.60	26.93
Анортит	8.60	4.94	9.33	3.28
Биотит	6.86	6.30	4.20	0.55
Магнезит	2.46	2.70	2.26	1.94
Флюорит	—	2.07	—	—
$FeSiO_3$	—	—	—	2.74
Остаток Al_2O_3	—	—	—	1.01

Из сопоставления минералогического состава этих гранитов с типичным коростенским, по данным Безбородько, видно, что они уклоняются в сторону обогащения кварцем и биотитом и обеднения плагиоклазом, а частью и ортоклазом (№ 1022), представляя уже остаточную магму коростенского типа, идущую в направлении пегматита, что сказывается и в проявлении пневматолитичного ее характера в образце № 599, показанного появлением значительного количества флюорита.

Магматические формулы по Левинсон-Лессингу для этих трех гранитов и типичного коростенского гранита из анализа Безбородько таковы:

№ 598 $1.9\,\overline{RO}\cdot 1.3R_2O_3\cdot 12SiO_2$; $\alpha = 41$; $R_2O : RO = 1 : 1.1$
№ 599 $1.2\,\overline{RO}\cdot 1R_2O_3\cdot 9.7SiO_2$; $\alpha = 4.6$; $R_2O : RO = 1 : 1.1$
№ 1022 $0.95\,\overline{RO}\cdot 1R_2O_3\cdot 10.3\,SiO_2$; $\alpha = 5.2$; $R_2O : RO = 1 : 1.0$
Безбородько $1\,\overline{RO}\cdot 1R_2O_3\cdot 8SiO_2$; $\alpha = 4.0$; $R_2O : RO = 3 : 1$

Мы видим повышенную сравнительно с нормальным типом кислотность (коэффициент α), особенно для № 1022, и падение щелочей почти в три раза.

Формулы по Озанну дают такую картину;

№ 598 Si — 78.76; A — 5.80; C — 2.78; F — 6.88
s — 78.76; a — 11.3; c — 4.7; f — 14.6; K — 1.67
№ 599 Si — 81.65; A — 5.01; C — 3.38; F — 4.75
s — 81.65; a — 11,5; c — 7.7; f — 10.8; K — 1.95
№ 1022 S — 83.69; A — 3.76; C — 4.38; F — 5.31.
s — 83.69; a — 8.4; c — 9.8; f — 11.8; K — 2.2.
Безбор. S — 79.93; A — 7.57; C — 1.61; F — 3.27
s — 79.93; a — 18.35; c — 3.98; f — 7.67; K — 1.62.

Формулы Озанна также свидетельствуют о повышенной кислотности анализированных пород, особенно № 1022.

При нанесении на треугольную диаграмму порода № 599 укладывается близко к точке шепетовского гранодиорита Безбородько (см. список литературы № 1, табл. II и стр. 45), а остальные две породы на диа-

грамме уходят в сторону точки F, что можно объяснить значительным содержанием магнетита в породе. Тем не менее, как это видно из сопоставления цифр анализа, и эти породы в общем не далеко отходят от среднего состава биотитового гранита, как он выведен проф. Чирвинским (см. таблицу анализов).

Значительным развитием на площади разведок пользуются пегматитовые разности того же гранита с переходом в типичный письменный гранит (еврейский камень).

Полевой шпат в пегматите и письменном граните представлен буровато-розовым, буровато-желтым до мясо-красного ортоклазом или ортоклаз-пертитом, а также микролином с полисинтетической решеткой п.м. или без нее (№ 1204), с затемн. на (001) 11°—15°. На микроклине иногда нарастает альбит (№№ 823, 1244). В шлифе № 887 из Острони, канава № 4, под бинокул. лупой наблюдается такая картина: а) внутренняя часть — микроклин-пертит с типичной микроклиновой решеткой, желтоватый, мутный; б) тонкая полоса прозрачного, бесцветного альбита, иногда с кристаллическими очертаниями наружу с затемнением на (001) плюс 5°. На теодолитном микроскопе найдено: 2V = + 72°. Двойниковая ось по альбитовому закону: Ng — 14°, Np — 87°, Nm — 77°, плагиоклаз № 0, альбит, в) розовый мало прозрачный слой альбита. На теодол. микроск. найдено: двойн. ось по манебахскому закону: Np — 74°, Ng — 88°, Nm — 16°, плагиоклаз № 2, альбит. В одном краю образца видно нарастание в таком порядке: а), б), в), б).

На выступающих на образце кристаллах микроклина вообще видно сильное разъедание и альбитизация.

Кварц большею частью темносерый, жирный, в виде неправильных зерен или в форме «рыбок» (ихтио) с индукционной штриховкой. Иногда отдельные зерна и ихтио снаружи переходят в сплошную массу кварца. В промежутках между зернами темного кварца наблюдаются вторичные выделения светлодымчатого или аметистового кварца. В последнем часто видны игольчатые включения турмалина, собранные пучками или сферолитами буроватого цвета, иногда они бесцветные и за тонкостью иголочек установить минеральный вид не удалось. Можно предположить гетит (№ 18).

Вторичный светлый кварц на темном всегда подстилается тонкой корочкой молочно-белого кварца.

Часто встречается и совершенно темный морион.

Из слюд в пегматите чаще встречается мусковит. Иногда в значительном количестве обычного вида. Биотит же, кроме обычных пластинок,

находится в виде «лейст», т. е. полосок длиной до 45 мм при ширине около 2—4 мм с поперечной отдельностью (№№ 567, 587, 700).

В пегматите находятся иногда (№ 823 и др.) миаролиты с кристалликами мориона или дымчатого кварца и полешпата.

Замечается переход от мелкокристаллического письменного гранита (еврейского камня) к крупному пегматиту к периферии образцов, причем ихтио располагаются часто радиально.

Следует еще отметить наблюдавшийся на образце № 700 темнодымчатый кварц в виде «елочки», как особый тип письменной структуры.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ

Распространением по площади разведок пользуются одинаково как розовый гранит коростенского типа, так и связанный с ним пегматит с письменным гранитом. По плану разведочных работ и имеющемуся материалу дальнейшие детали установить нельзя.

Следует отметить только стоящий особняком выход пеликанитового гранита в Писаревке, канава № 18, связанный с крупно- и среднезернистым серым гранитом.

Интересно отметить большое сходство, судя по описанию Ферсмана (№ 7, 314), гранита топазового месторождения Шерловой горы с нашим коростенским гранитом: «светлый среднезернистый гранит Шерловой горы характеризуется своим несколько порфировым строением, бедностью слюдой и присутствием темного дымчатого кварца, придающего породе пестрый вид».

III. МИНЕРАЛОГИЯ

А. ТОПАЗ

1. Кристаллография

В виду крупного размера кристаллов и неровности граней (травление, матовость) измерения можно было производить только прикладным гониометром. Таким образом, измерения не могли служить для установления констант и точных гранных углов, а только для нахождения индексов форм. Для ориентировки и буквенного обозначения форм я пользовался данными по топазу из минералогической системы Дена (№ 6). Кристаллов с развитием граней на обоих концах бипирамиды совершенно не наблюдалось, равно как и вообще форм с полным развитием граней.

На всех измеренных кристаллах констатированы следующие простые формы:

Вертикальные призмы:	Горизонтальные призмы:	Бипирамиды.	Пинакоиды:
m (110)	f (021) d (201)	O (221)	c (001)
l (120)	β (011) p (101)	ψ (122)	b (010)
n (140)	y (041)	i (223)	
g (130)	x (043)	u (111)	
		r (241)	

Относительно пинакоида (001) следует сказать, что одна из его граней наблюдается почти на всех кристаллах, а изредка и обе, но отнести ли эти плоскости к граням или к плоскости спайности — вопрос остается открытым. Хотя эта плоскость иногда и бывает даже сплошь покрыта фигурами травления, все же ее скорее приходится признать за спайную поверхность.

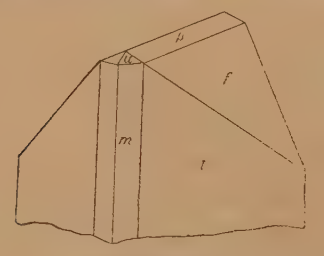
По преобладанию указанные формы располагаются в таком порядке:

(110), (120), (021), (221), (011), (201), (111), (140), (130), (043), (122), (010), (241), (243), (101), (041), (223).

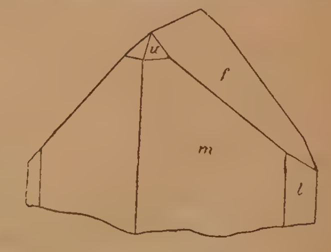
Из этих 17 форм исключительно преобладают первые три как по величине граней, так и по количеству случаев: из 40 кристаллов с гранями форма (120) встречена на 26, форма (110) тоже на 26, форма (021) на 22, форма (221) на 9, форма (011) на 5, форма (201) на 5, остальные формы встречались 1—2 раза.

2. Тип кристаллов

Кристаллы, представленные описанными образцами, не дают одного какого-либо определенно выраженного кристаллографически типа (фиг. 2).




Квадратный тип.



Ромбический тип.

Фиг. 2. Облик кристаллов волынского топаза.

В силу преобладания развития формы (021) скорее можно отнести их к типу Адун-Чилона (Забайкалье), если же считать пинакоид (001) за первичную грань, то к типу Мурзинки (Урал), куда они приближаются и по цвету.

По развитию вертикальных призм (110) и (120), кристаллы дают как квадратный {120}, так и ромбический {110} облик. Квадратный более резко представлен в коренном месторождении Викторинки, в шур. № 4. Ромбический облик представлен в некоторых некоренных месторождениях Викторинки — канавы №№ 15, 16, 12 — и в находках на поверхности. Следует отметить еще особый вид «обсосанных» кристаллов (№№ 677, 694, 797 и особенно 795 и 762), которые были указаны для Мурзинки акад. Ферсманом (№ 7, 95 и № 8, 109)

3. Травление

На всех кристаллах без исключения наблюдаются на гранях, на поверхности спайности (001) и даже на поверхностях излома явления травления в виде фигур травления в форме как ямок, так и холмиков. Ассиметрии фигур, как то указывает Пеликан (№ 10), не замечено. Вытравление идет по зонам, указанным Пеликаном. Характерно также постоянное вытравление спайности по (001), отмеченное и Ферсманом (№ 7, 114), но фигуры травления имеют не ромбический как у Laspeyres'a (№ 9, 344), а прямоугольный вид. При этом части располагаются «дорожками», направление которых, очевидно, дано было первоначально царапинами, как это отмечено для японских топазов.

Причиной травления можно считать действие щелочных растворов. Последние могли возникнуть действием воды на полевые шпаты пегматита с переводом в раствор кремнекислой щелочи (№ 8, 124). При этом шпаты превращаются в мусковит и каолин или, по Laspayres (№ 9, 111), в плотный горный мозг, каковой как раз и наблюдается в канаве № 1 из Викторинки. При этом, как указано еще Пеликаном, природные фигуры травления на топазах отвечают полученным искусственно сплавлением с KOH, согласно данным Баумгауэра, а не действием кислого сернокислого калия ($HKSO_4$), какие получал Laspeyres.

Результатом травления являются и некоторые грани кристаллов, как (0$\bar{1}$1) и (101), которые и Ферсман относит к прерозионным граням (№ 8, 115). Эти же явления травления приводят и к «обсосанности» кристаллов, отмеченной выше, а иногда и к полной изъеденности кристалла с образованием каверн (№ 744) и к понижению поверхности некоторых граней, причем соседние нависают над ними в виде карниза (там же и на № 1240/1).

4. Включения

Большинство кристаллов несет внутри включения, а некоторые из кристаллов становятся даже мутными от включений. Последние относятся к виду, описанному еще Ауэрбахом (№ 11), и имеют характер или 1) полигранный, или 2) узкий, вытянутый, или 3) неправильной формы, с тонкими отростками, «амебовидный». В большинстве случаев наполнены жидкостью с пузырьком газа. Расположение включений или неправильное, или, реже, параллельное, или в некоторых неправильной формы плоскостях.

5. Физические свойства

Твердость обычная по шкале Мооса — 8.

Спайность совершенная по основному пинакоиду (001), проявляющаяся на всех без исключения образцах, причем из 48 образцов на 26 имеются и верхняя и нижняя поверхность. В редких случаях заметна еще спайность по (201), напр., образец № 710.

Блеск обычный стеклянный, на некоторых кристаллах в силу травления получается шелковистый блеск (кр. № 1240/1).

Цвет исключительно светлоголубой и светлый винно-розовый. При этом оба цвета нередко наблюдаются на одном и том же кристалле, располагаясь закономерно: голубая по направлении оси Y, розовая — на конце оси X, реже голубая сосредоточена в середине, а концы обеих осей розовые. Есть кристаллы и бесцветные.

Прозрачность у большинства кристаллов очень высокая, у некоторых безукоризненная, но иногда прозрачность нарушают обильные включения или затеки окислов железа по неправильным трещинам или по спайности.

Удельный вес был определен на бесцветном кристалле № 1034 из Писаревки. Данные трех определений такие: 3. 568; 3. 563; 3. 565; среднее = 3.566.

Б. БЕРИЛЛ

Вместе с топазами был прислан и кристалл берилла, как образец № 1078 из Писаревки, кан. № 21, вес. 16.5 г, разм. 27 × 20 × 29 мм.

Форма образца неправильная. Только с одного боку имеется остаток двухгранный вертикальной гексогональной призмы с углом 59°. На этих гранях видны вытянутые вертикально прямоугольные фигуры травления. Со всех сторон кристалл матовый, окатанный. Спайность не заметна, есть

неправильные трещины. Идеально прозрачный, за исключением углублений, заполненных глинистым веществом. Цвет светлый, зеленовато-голубой, так что кристалл можно отнести к разновидности аквамарина. Удельный вес 2.639.

В. ОРТОКЛАЗ

Крупные кристаллы ортоклаза размером до 12 см по оси Y, до 5 см перпендикулярно к (100) и до 4 см по оси Z. На кристаллах наблюдались те же формы и в том же развитии, как на ранее уже мною описанных кристаллах полешпата с Волыни (см. № 12, 125), а именно: (110), (130), (010), (001), ($\bar{1}$01), ($\bar{2}$01), (021), ($\bar{1}$11). Сверху кристаллы обычно ограничены пинакоидами (001) и ($\bar{1}$01) или ($\bar{2}$01), снизу же плоскостью спайности по (00$\bar{1}$). Двойников не наблюдается.

Кристаллы такого вида представлены значительным количеством образцов из Викторинки, канава № 19, образец № 848, 847, из Александрии — № 546, 579, 568, канава № 3 и 4, из Писаревки — № 9, канава № 1.

Кристаллы б. ч. мутные, молочно-белого цвета, переходящего в желтоватый, с кирпично-красными пятнами и мраморовидными разводами. Но на тех же кристаллах встречаются и полупрозрачные и прозрачные бесцветные «адуляровые» места. Иногда они настолько преобладают, что их можно прямо назвать адуляром, особенно спайные куски № 893 из Александрии, канава № 3.

Спайные осколки по (001) п.м. микролиновой решетки не обнаруживают и дают прямое затемнение. Затемнение на (010) доходит до 8°.

Характерны на кристаллах явления разъедания. На кристалле № 9 наблюдается морщинистость или бороздчатость граней от разъедания, которая на гранях (001) и ($\bar{1}$01) идет параллельно этому их ребру, а на грани (010) — параллельно оси Z. Полюс спайности по (010) имеет такие координаты: Ng — 2°, Np — 90°, Nm — 90°.

Разъедание сменяется дорастанием в виде прозрачного адулярового вещества, сохраняя те же очертания. Особенно сильно дорастание идет на грани (010), давая здесь вторичную «адуляровую» грань призмы (130). В этой адуляровой массе наблюдается разъедание в виде каналов, идущих перпендикулярно к (010). Сверху адуляровая часть покрывается опять отложением нового мутного ортоклазового вещества в виде тонкой корки до 1 мм желтовато-белого цвета, которая закрывает вышеуказанные

каналы разъедания. Мутная оторочка распространяется и на грани призмы (110), которые обычно адуляром не дорастают.

Разъеденность ортоклаза бывает иногда такой интенсивности, что вещество его становится дырчатым как губка (№ 851 из Викторинки, кан. № 19).

Изредка наблюдаются в ортоклазе мелкие включения зерен мориона и пертитовое прорастание альбитом (угол угасания на осколках 5° и 19°).

Г. БИОТИТ

Кроме обычного биотита гранитов встречаются в пегматите «лейсты» биотита, т. е. лентообразно вытянутые плоские кристаллы его. Таков биотит в письменном граните и пегматите образцов № 567 и 587 из Александрии, канавы № 2 и 5 и из Викторинки № 846, канава № 19. О таком биотите говорит Ферсман в «Пегматитах» (№ 5, 321).

Д. МУСКОВИТ

Мусковит встречается в крупных, до 8 см в поперечнике пластинках, б. ч. без определенных кристаллических очертаний, обычно же размером 2—3 см. Толщина табличек доходит до 2 см. Есть ромбические сечения кристаллов в мелком пегматите. Цвет обычный светлый, иногда темнее до бронзового. Блеск перламутровый. Иногда переходит в серебристо-белый аггрегат, жирный на ощупь (гидрослюда ?). Часто затеки окислов железа сообщают мусковиту ржавый цвет.

П. м. никаких включений, кроме ржавых затеков, нет. Угол оптических осей, определенный на столике Федорова, колеблется в таких цифрах: 31.5°; 31°; 27°; 26°; характер минерала — минус. Дисперсия $\varrho > v$. По фигуре удара слюда 1-го рода. Угол между перпендикуляром к (001) и острой биссектрисой 2°, 6°, 10° и 11°.

Е. КВАРЦ

Кварц представлен несколькими разновидностями.

а) Морион является из них самым распространенным. Хорошо образованные кристаллы мориона достигают до 10 см в длину и до 6 в толщину, а один обломок кристалла мориона из шурфа № 4 из Писаревки имеет размеры 23 × 14 × 6 см.

Обычными формами являются призма первого рода $(10\bar{1}0)$ и основной плюс и минус ромбоэдр $(10\bar{1}1)$ и $(01\bar{1}1)$, развитые обычно равномерно до образования гексагональной пирамиды. Кроме того встречаются острые

ромбоэдры $(40\bar{4}1)$, $(50\bar{5}1)$, придающие кристаллам конусовидный вид. Грани почти у всех кристаллов слегка окатаны и матовы.

Характерное явление наблюдается на образце № 628 из Викторинки, канава № 12. Тут было сначала дорастание, «залечивание» мориона светлодымчатым кварцем, потом нарастание прозрачного кварца двух генераций, в два приема, корочкой толщиной каждая до 1 мм. Такая корочка более или менее прозрачная наблюдается на большинстве кристаллов мориона.

Другой конец кристаллов обычно обломан и окатан, но на одном есть дорастание из мелких кристалликов (№ 574). У одного образца черная головка переходит в светлое окончание.

Цвет вообще очень темный, а цвет большого обломка шурфа № 4 смоляно-черный.

б) Дымчатый кварц. Почти столь же распространен как и морион и связан с ним переходами. По форме отличается тем, что не дает острых ромбоэдров, а только основной и призму. Интересна форма образца № 487 из Викторинки, канава № 1. Кристалл 55 × 50 × 30 мм образован с обоих концов и имеет вид бипирамидального α-кварца (по Ферсману). Он сплюснут поперек призмы и имеет поперечное сечение ромбическое, благодаря недоразвитию призмы.

Наблюдается дорастание мелкими светлыми кристаллами кварца. На образце № 1246 из Писаревки, найденном на поверхности, на темнодымчатом кварце наросла вторичная корочка железистого кварца, на ней более толстая кора кварца как раньше, опять тонкая корочка железистого и, наконец, сверху темный аметист.

Другой кристалл, найденный там же (№ 1230), несет на гранях призмы идущие поперек граней косо полосы около 1 мм толщиной из кристалликов наросшего кварца, слегка вытянутых поперек призмы, расположенных в паралелльном положении. На ромбоэдрах нарастание в виде сплошной корки.

в) Волосатик. Образец № 187 представляет гальку светло-дымчатого кварца, проросшего тонкими, около 0.5 мм толщиной, черными иглами турмалина.

г) Халцедон (?). Следует отметить еще кремневый скрыто-кристаллический натек, покрывающий кристаллы адуляра образца № 566 из Александрии. Натек затекает в трещины спайности полешпата.

д) Аметист. Встречается как нарастание на остальных темных кварцах. В нем сосредоточены указанные выше игольчатые собранные пучками и сферолитами включения гетита и турмалина.

IV. ГЕНЕЗИС

По генезису месторождения волынские топазы можно подразделить на два вида: 1) россыпные и 2) коренные.

1. РОССЫПНЫЕ

Первая находка топаза на Волыни, сделанная проф. С. В. Бельским и описанная мною в 1911 г. (№ 13, 225), относится к спайному куску топаза, найденному на вспаханном поле колонии Остронь; фотография этого образца имеется в моей работе «К минералогии Волыни. III. Список литературы и минералов» (№ 14). Такого же россыпного характера и последующая находка С. В. Бельским топазов в 1924 г. в Писаревской Гуте. По словам проф. Бельского, «на поле находится пегматитовая жила, в жеоде коей и найдены топазы вместе с горным хрусталем». Всего найдено было 6 экземпляров, описанных мною в 1925 г. (№ 12, 136). По физическим свойствам эти топазы подходят к бразильским, которые как раз известны из россыпей.

Разведки на топаз в 1931 г. дали тоже исключительно россыпной материал, который только под конец работы привел к открытию коренной жилы в шурфе № 4.

Добыча классических бразильских топазов долгое время производилась только из россыпей, и коренная порода была неизвестна, как пишет М. Бауэр (№ 15, 419).

В Австралии топазы находятся также исключительно в россыпях (Бауэр, № 15, 425). Известны так наз. «дерновики», т. е. россыпные топазы и на Урале, а самые россыпи носят название «дерних» — Каменка, Санарка (7, 26, 56, 244, 360).

Поэтому в найденных до сих пор на Волыни образцах преобладают спайные куски; совершенно не встречаются кристаллы, образованные с двух концов, а встречающиеся кристаллы более или менее окатаны, или, во всяком случае, грани их матовы. Так как мат этот покрывает иногда имеющиеся на кристаллах фигуры травления, то ясно, что он нанесен на грани уже после травления, т. е. не в коренном месторождении.

Найденные россыпные топазы достигают больших размеров. Так, в материале, добытом еще в первую половину работ и просмотренном мною, имелось несколько галек топаза около $^1/_2$ кг весом, иногда совершенно окатанных, идеально прозрачных, а среди них один кристалл весом более 1 кг (1060 г) с матовыми гранями и свежим пинакоидом (001), что говорит

за его еще большую первоначальную величину. В Писаревке (Амбургер) был найден розовый идеально прозрачный топаз, расколовшийся на два куска в 1400 и 300 г.

Характерно, что как бразильские россыпные топазы бесцветны (вторичное обесцвечивание?), так и среди россыпных волынских преобладают бесцветные; из 180 просмотренных мною топазов по окраске они распределяются так: бесцветных — 70 (39%), винно-желтых — 26 (14.5%), двухцветных — 26 (14.5%), розовых — 24 (13.2%), голубых — 31 (17.2%), зеленоватых — 3 (1.6%).

Так как топаз обладает высокой твердостью — 8, то окатывание его должно было итти очень медленно, и окатанные гальки топаза указывают на очень большой проделанный ими путь или на особые условия длительной обработки на одном месте, например, в «котле» на дне ручья или реки, какие известны, например, на р. Тетереве, так называемые «Ольгины купальни».

Времени для образования топазовых россыпей разрушением его коренных месторождений было достаточно за период абразии гранитного массива «Украинских Альп» акад. Тутковского, на месте которых теперь расстилается холмистый пенеплен Волыни.

Личков, говоря о фазах денудации Украинского кристаллического массива (№ 16), на построенной им карте рельефа этого массива отмечает места «западин» на его подземной теперь поверхности. «С областями определенного понижения», пишет он на стр. 26, «надо связать относящиеся к районам выхода кристаллических пород части речек Тетерева, Ирши, Здвижа и Ирпеня» (разрядка моя). О времени образования этих западин он говорит, что «они были созданы речной денудацией одной из континентальных фаз, предшествующих третичному времени, а может быть даже нескольким таким фазам. Ясно во всяком случае одно, что возникновение этих западин — один из моментов длительного процесса пенепленизации, пережитого кристаллическим массивом» (стр. 28).

Если нанести на карту Личкова местонахождение топазов, то оно попадает как раз на край западины р. Ирши, именно на ее западный край. Следовательно, работа денудации шла приблизительно с запада на восток или на юго-восток, а потому в обратном направлении можно ожидать обогащения россыпей и нахождения коренных месторождений.

2. КОРЕННЫЕ МЕСТОРОЖДЕНИЯ

Еще в 1911 г. по поводу первой находки топаза (№ 13, 226) я писал: «Нахождение тут же на поле крупных кристаллов дымчатого горного

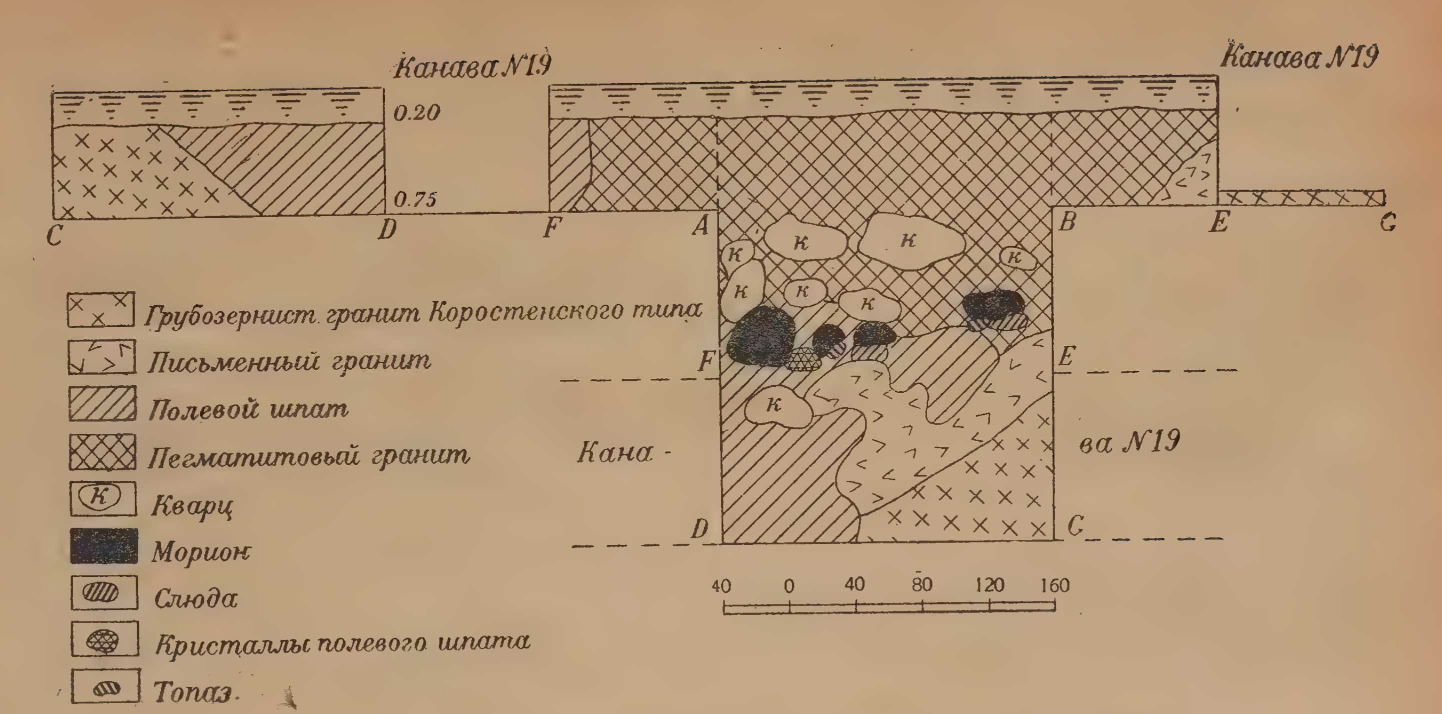
хрусталя, а также крупных обломков его же и полевого шпата, дают возможность предположить существование в этом месте пегматитовой жилы с топазами», что и подтвердилось открытием Бельским коренного месторождения топаза в 1924 г. (№ 12, 136) и жилы с топазом в шурфе № 4 осенью 1931 года (фиг. 3).

Нет никакого сомнения, что коренным месторождением топаза являются пегматитовые жилы, связанные с гранитным массивом.

По Ферсману «пегматиты премущественно накапливаются в вершине батолита» (№ 5, 83). Проф. Безбородько говорит, что «наиболее типу батолитов могут отвечать, с одной стороны, наиболее северный из указанных массивов (граниты коростенской магмы), если не целиком, то отдельными своими участками» (№ 1, 51), и отмечает, согласно с вышеприведенным мнением Ферсмана, что «развитие пегматитов может быть приурочено также к верхним горизонтам массива» (№ 1, 52). На прилагаемой к цитированному труду карте проф. Безбородько место, где встречены топазы, является как раз пробелом. Коростенский тип магмы показан на территории рр. Ужа, Жерева и Норыни (№ 1, 8). Мне кажется, что теперь следует сюда же приобщить и р. Иршу. И возможно, что в районе нахождения топазов придется поставить такой же участок развития пегматитов, какие уже отмечены на карте в других местах. Наличие пегматитов было скрыто под наносами и обнаруживается только благодаря разведкам на топазы.

Проф. Безбородько в геохимии украинской кристаллической полосы (№ 17, 35) совершенно игнорирует такой пнеуматолитический элемент как фтор. Между тем акад. Вернадский в своей Минералогии (18, 399) говорит, что «повидимому, для кислых гранитных магм образование топаза является одним из обычных процессов последней стадии застывания». За более значительную геохимическую роль фтора в украинской кристаллической полосе, чем это м. б. принято думать, говорит его довольно частое нахождение в гранитах этой полосы в виде флюорита. Так, в образце гранита № 599 флюорит присутствует в количестве 2.07%. Сам Безбородько указывает на флюорит в коростенском граните (№ 1, 4 и 5) и в россоховском граните (№ 1, 7). Мною флюорит макроскопически был встречен в житомирском граните. В значительных количествах и макро- и микроскопически флюорит встречается в щелочных гранитах и сиенитах приазовской полосы.

Наличие пнеуматолитических явлений в данном участке коростенского массива подтверждается еще выходом пеликанитового гранита на территории Писаревки по близости от нахождения топазов. За пнеуматолитический же



Фиг. 3. Разверстка шурфа № 4 (схема) по чертежу начальника геол.-разв. партии В. П. Амбургера.

генезис пеликанитов в последнее время высказываются Гинзбург и Гаврусевич (см. литературу у последнего, № 32).

3. МЕСТО ВОЛЫНСКИХ ТОПАЗОВ В ПЕГМАТИТОВОМ ПРОЦЕССЕ

В своей монографии о гранитных пегматитах акад. Ферсман ставит волынские пегматиты как пример типа 2-го — пегматиты с редкими элементами (№ 5, 174), в основе которых лежит фаза C, базируясь, главным образом, на редкие элементы. Тип этот к нашему случаю совершенно не подходит. Правда, там же Ферсман оговаривается, что «любопытно нахождение топазовых фаз типа № 4» (№ 5, 195).

К этому типу № 4 — фторо-бериллиевому (топазово-берилловому), именно подтипу топазовому Ферсмана, приходится отнести месторождение волынских топазов.

Ферсман (№ 5, 197) указывает, что «вообще жилы 4-го типа приурочены в главной своей части к глубинным гранитам, чаще всего герцинской системы и совершенно неизвестны в древних архейских щитах». Тут возникает противоречие, которое потребует еще дальнейших исследований. Сейчас можно только указать, что по Тетяеву (№ 20) украинская кристаллическая полоса «представляет собою размытое антиклинальное ядро внутри герцинской зоны складчатости палеозоя» (№ 20, 89). Влияние герцинских дислокаций выдвигает Личков (№ 21, 139). Гаврусевич в работе по минералогии и геохимии пегматитов Волыни дает, как один из трех, тип 2-й топазово-литиевый, указывая на дальнейшие возможности находки в этом типе на Волыни берилла, что и подтвердилось (№ 24, 82).

В силу скудости материала из коренного месторождения и неясности отсюда парагенетеческих отношений, строго установить тип пока еще нет возможности, но указаные соображения общего характера и имеющийся минералогический материал говорят за этот тип, № 4.

Для типа 4-го Ферсман дает такое обычное построение (5, 196):

Фаза B — мелкозернистая аплитовидная зона мощностью до 50 см.
Фаза C — письменный гранит с лейстами биотита.
Фаза D — пегматитовая зона с шерлом и мусковитом.
Фаза E — выполнение стенок друз и жеод.

Нередко за этой нормальной фазой следует фаза E с обильным выделением альбита, иногда нацело разъедавшим весь комплекс, и фаза L, заполняющая пустоты-занорыши белой или бурой глиной. Иногда же наблюдается небольшое количество минералов фазы F.

За тип 4-й в целом говорит наличие следующих найденных при волын-

ских топазах минералов: дымчатый кварц и морион, топаз, берилл, мусковит, циннвальдит, найденный хотя и не тут, но поблизости — в Усолусах (№ 22, 5), турмалин черный игольчатый (шерл).

На фазы от B до L в волынском топазоносном пегматите имем такие указания по минералам, найденным при разведке:

1) Берилл-аквамарин с короткой призмой, образец № 1079 из Писаревки. По Ферсману фаза E (5, 321).

2) Биотит в форме узких и длинных полос в письменном граните, в виде «лейст», отвечает фазе B и особенно C (5, 321).

3) Каолин в виде белого плотного вещества — штейнмарк, горный мозг, образец № 501, 502 из Викторинки и бурая глина. Фазы J — K — L (5, 327).

4) Кварц.

а) Кристаллы без призм, образец № 487 из Викторинки, канава № 1. Фаза B (альфа-кварц).

б) Дымчатый горный хрусталь и морион. Фаза C — D.

в) Зонарные нарастания, молочные корочки. Фазы F — G.

г) Мелкокристаллические образования, халцедон. Короткостолбчатые аметисты. Фазы J — K (5, 330 и 335).

5) Мусковит встречается в ромбических сечениях; фаза D (5, 340), но наичаще в гексагональных очертаниях, с бронзовым оттенком или серебристо-перламутровым блеском, что говорит за принадлежность скорее всего к фазам E — F (5, 340).

6) Ортоклаз-адуляр. Так как ортоклаз представлен вполне окристаллизованной формой, то он отвечает фазе E. Разъедание кристаллов ортоклаза надо отнести к фазе F — G, а нарастание адуляра к гидротермальной фазе H — K. Но возможно, что образование перпендикулярно к (010) каналов обусловлено пертитизацией ортоклаза 1-й генерации в фазе C — D, и тогда кристаллы ортоклаза надо считать более ранним образованием высокотемпературных фаз A — B, после чего следовала пертитизация (фазы D — E), потом выщелачивание альбитовых лейст (фазы F — G) и, наконец, нарастание адуляра (5, 344—347).

7) Топаз. Квадратный тип из шурфа № 4 в Викторинке отвечает фазе D — E, особенно если принять, что базопинакоид есть грань, а не плоскость спайности. Преобладает призма (120).

Топазы ромбического или гексагонального облика с преобладанием призмы (110), слабо окрашенные, — а их как раз большинство, — отвечают фазе E — F.

Доматические кристаллы с преобладанием домы (021) и призмы (120), бесцветные и голубые, тоже распространенный тип, фаза F — G.

Таким образом, главное образование топазов падает на фазу F, характерную именно для 4-го типа.

Разъедание топаза указывает на фазы G — H (5, 356—357).

8) Шерл (черный турмалин). Игольчатые включения в аметисте и светлом кварце относятся к поздним фазам, как и сам аметист, к фазе H. Интересно отсутствие более раннего шерла. Возможно, что он разрушился и не сохранился в том расссыпном материале, который сейчас имеется. Что его нет, хороший признак для топаза.

Итак, наличие приведенных минералов говорит за тип 4-й пегматита по Ферсману. Но как характер самих минералов, так и такие явления, как лейсты биотита, указывают, кроме того, и на высокотемпературную его фазу, на глубокие части пегматита, на его «корни».

Ферсман в своей «Геохимии России» объясняет бедность минералами пегматитов Олонецкого края и Кольского полуострова также колоссальным смывом сначала больших древних хребтов, а затем целого ряда осадочного покрова эопалеозойских пород (№ 23, 84). Возражение Гаврусевича против этого положения, сделанное им в работе о пегматитах Волыни (№ 24, 1), не меняет дела, так как относится только к редкоземельным минералам типа 1-го и 2-го.

Кроме того, отсутствие таких пнеуматолитических и гидротермальных минералов как лепидолит, зеленые мусковитовые слюдки, турмалин, гребенчатый альбит, светлый кварц и самостоятельный аметист, цеолиты — говорит за то, что верха пегматитовой жилы снесены, абрадированы. Занимающий среднее положение в жиле топаз тоже, главным образом, пошел уже в россыпь, оставшись в жиле только в повышенных частях рельефа, как шурф № 4.

В то же время за наличие пнеуматолитического процесса в этих же жилах говорят чрезвычайно резкие явления вытравления на топазах и на берилле, разъедание кристаллов ортоклаза, иголочки шерла в наросшем на морион аметисте. За тот же пнеуматолиз говорит и близость пеликанитового гранита.

Из вышесказанного следует, что топазовые пегматиты Волыни, представляя по существу тип 4-й по Ферсману, прошли, однако, все фазы пегматитового процесса, но в настоящее время мы имеем дело только с нижней частью и с частично сохранившейся средней частью жил в коренном месторождении и в материале россыпей.

V. ВЫВОДЫ

1. Район разведок на топазы сложен розовым порфировидным гранитом коростенского типа.

2. На той же площади имеется выход пеликанитового гранита.

3. При разведке выявлены окристаллизованные минералы: ортоклаз, биотит, мусковит, кварц дымчатый, морион, аметист, топаз, берилл.

4. Указанные минералы находятся в двух типах залегания: 1) россыпи и 2) коренное месторождение.

5. Коренное месторождение топаза представляют пегматитовые жилы, из которых одна вскрыта шурфом № 4.

6. Пегматитовые жилы с топазом должны быть отнесены к типу 4-му, подтипу топазовому, по классификации акад. Ферсмана.

7. Минералы, взятые при разведке, указывают на прохождение данной жилы через фазы пегматитового процесса от B до L.

8. Топазы образовались в жиле в среднюю пневматолитическую фазу D — G.

9. Топазы подверглись сильному разъеданию в начале фазы H.

10. Благодаря общей абразии массива, остались низы пегматитовых жил.

11. Главная часть топазов ушла в россыпь.

12. Согласно древнему рельефу массива направление россыпей вероятнее всего предположить в восточном, юговосточном и южном направлении. Следовательно, коренные месторождения, по отношению россыпей, должны быть от них на запад, северо-запад и север.

13. Не исключается возможность нахождения других аналогичных месторождений на более широкой площади. Проводниками при поисках могут быть кристаллы мориона, дымчатого хрусталя, аметиста и полевого шпата.

14. Возможны дальнейшие находки берилла (аквамарина).

15. С углублением в коренных жилах последние могут обеднеть топазом.

16. В виду большой твердости топаза и его химической прочности он может уходить в россыпи далеко от коренного его месторождения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безбородько, Н. И. Граниты Волыни и их пегматиты. Вістн. Укр. відд. геол. Ком., 1929 р., № 13, стр. 25—82.

2. —— Главные типы месторождений полевых шпатов на Волыни. Мат. совещ. по пол. шпату 23/24 IV 1927 г. Изд. Геол. ком., 1928, стр. 39—48.

3. Морозевич, И. К петрографии Волыни. Варш. Универс. Изв. 1893, т. IX.

4. Чирвинский, П. Н. Количественный, минералогический и химический состав гранитов и грейзенов. М., 1911. Изд. Донск. полит. инст.
5. Ферсман, А. Е. Пегматиты. Их научное и практическое значение. Т. I. Гранитные пегматиты. 1931. Изд. Акад. Наук СССР.
6. Dana, E. S. System of Mineralogie. Descriptive mineralogie. 6 edit. N. J., 1899.
7. Ферсман, А. Е. Драгоценные и цветные камни России. П. 1922. т. I.
8. Ферсман, А. Е. К минералогии пегматитовых жил среднего Урала. Тр. Минер. муз. Акад. Наук СССР, т. II, 1927.
9. Laspeyres, H. Mineralogiche Bemerkungen. II Theil, Zeit. f. Krist. 1877, B. I, S. 344.
10. Pelikan. A. Natüraliche Aetzung Topazkristallen von San. Luis. Potosi im Mexico. Tscherm. Mitt. 1890, B. 12, S. 331.
11. Ауэрбах, А. Наблюдения над кристаллами топаза под микроскопом. Зап. Минер. о бщ. сер. 2., ч. 5, 1870, стр. 162—168.
12. Иванов, Л. Л. К минералогии Волыни. I. Микроклин, ортоклаз, топаз, ортит и др. минералы. Тр. Волын. геол. партии. Исслед. 1923 г. Житомир, 1925, стр. 125—145.
13. —— К минералогии Волыни. I. Топаз, гизингерит, гетит, графит. Тр. Общ. иссл. Вол. 1911, т. VI, стр. 225—232.
14. —— К минералогии Волыни. III. Список литературы и минералов. Тр. Общ. иссл. Вол., 1914, т. XI, стр. 113—155.
15. Bauer, M. Edelsteinkunde. Leipz., 1909, S. 419—426.
16. Личков, Б. И. О фазах денудации Украинского кристаллического массива. Тр. ГГРУ, вып. 23, 1930.
17. Безбородько, М. І. Українська кристалична смуга та корисні копалини України. Віст. Укр. в. Г. К. 1929 р. В. 12, ст. 30—41.
18. Вернадский, В. И. Минералогия. М., 1910, в. 1.
19. Гаврусевич, Б. Пеліканітові породи Троянівського району на Волині. Житомір, 1928 р.
20. Тетяев, М. К тектонике Украины. Віст. Укр. в. Г. К. 1926, в. 9, стр. 99—102.
21. Личков, Б. Л. О тектонических движениях Украинской кристаллической полосы и этапы развития северно-украинской мульды. Віст. Укр. в. Г. К. 1925, в. 6, стр. 115—141.
22. Иванов, Л. Л. К минералогии Волыни. II. Альбит, циннвальдит, каолин. Тр. Общ. иссл. Вол. 1913, т. VII, стр. 1—18.
23. Ферсман, А. Е. Геохимия России. В. 1, 1922 г.
24. Гаврусевич, Б. А. К минералогии и геохимии пегматитов Волыни. Тр. Мин. муз. Акад. Наук СССР, 1930, т. IV, стр. 71—83.
25. Bilsky, S. W. Enstehung der Gneisse und Granitgneisse Wolhyniens. Збірн. Волинськ. наук. досл. музею, 1928, I, ст. 31.
26. Абрамович, Ю. М. Участок у г. Коростеня. Тр. Вол. геол. парт. иссл. 1923 г. Ж., 1925, стр. 109—112.
27. Bücking, H. N. Jf. Miner. 1897, S. 251 (Refer.).
28. Мельников, М. П. Происхождение Ильменских топазов Г. Ж. 1882, т. IV, стр. 305—315.
29. Костылева, Е. Е. О форме разъедания кристаллов топаза из Шайтанки на Урале. ИАН, 1917, стр. 1415—1421.
30. Goldschmidt, V. 1) Über Aetzfiguren, deren Entstehung und Eigensehaft; 2) Zur Mechanik des Lösungsprozesses. Z. f. Kr. 1904, B. 38, S. 273—278 и 656—673.
31. Ферсман, А. Е. Драгоценные и цветные камни. «Нерудные ископаемые». Сборник КЕПС, т. I, 1926, стр. 359—400.
32. Гаврусевич, Б. А. Проблема генезиса пеликанитов Украины. Тр. Мин. инст. Акад. Наук СССР. 1931, т. 1, 91—102.
33. Гаврусевич, Б. А. К минералогии топазовых пегматитов Украины. Докл. Акад. Наук СССР, сер. А, 1932, № 7, стр. 173—180 (получено автором после окончания статьи и не использовано).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОЧЕРКИ ПО МЛЕКОПИТАЮЩИМ ПОЛЯРНОГО УРАЛА И ЗАПАДНОЙ СИБИРИ

К. К. ФЛЕРОВА

(*Представлено академиком* В. Л. Комаровым)

Два лета, проведенные в Западной Сибири и на Полярном Урале, дали мне возможность ознакомиться с жизнью зверей в этих отдаленных северных районах.

Настоящие очерки написаны по дневникам, веденным мною во время работ в Северо-Уральской экспедиции Академии Наук СССР. В мае 1926 г. наша экспедиция, спустившись из Тобольска по Иртышу и Оби до села Мужи, поднялась в лодках вверх по реке Сыне в Урал, где я и работал в течение $2^1/_2$ месяцев. Тяжелые условия севера, полное одиночество за сотни верст от человеческого жилья — не всегда способствовали успешности работы. Кроме того, во время крушения нашей лодки на порогах реки Сыни, на возвратном пути, сильно пострадали некоторые коллекции. Часть сборов была уничтожена и попорчена медведем, разгромившим в наше отсутствие базу в верховьях реки Сухой Сыни. В общем было сохранено около 200 экземпляров млекопитающих. Коллекции птиц и насекомых были сильно попорчены водой. Вся экспедиция этого года заняла слишком 6 месяцев. В следующем 1927 г., опять в начале мая, экспедиция направилась в г. Березов, откуда по рекам Северной Сосве, Ляпину и его притоку Манье поднялась в Урал, пройдя расстояние около 700 км. На этот раз, благодаря сопутствовавшему мне моему молодому другу препаратору Е. А. Слудскому, как переходы, так и сама работа протекли значительно успешнее. Нам удалось собрать больше 300 млекопитающих (среди

которых большой процент крупных), около 200 птиц и большое число других животных. В самом конце экспедиционной работы нас застал сильный снежный ураган на стоянке в верховьи реки Нярсовья, на верхней границе леса. Ураган длился пять дней.

Однако, все сборы удалось сохранить и в целости доставить в Ленинград, куда мы вернулись в начале ноября, пробыв в экспедиции больше шести



Фиг. 1.

(*Настоящий рисунок и все остальные сделаны автором*)

месяцев и имея для работы всего только два месяца, так как остальное время ушло на передвижение.

Для определения видового состава фауны млекопитающих Полярного Урала мною были использованы коллекции, собранные мною во время экспедиций, а также другие материалы, хранящиеся в нашем Зоологическом институте Академии Наук, собранные в разное время.

В этой статье я не собираюсь дать полный обзор всей фауны млекопитающих Полярного Урала и Западной Сибири. Здесь упоминаются лишь те, о которых мне удалось получить сведения во время экспедиции. Маршруты работ зоологического отряда напечатаны мною в Ежегоднике Зоологического музея А. Н. за 1929 г. Результаты работ по млекопитающим — также частично опубликованы, о чем будет сказано ниже в соответствующих местах текста настоящего очерка. Данные об общих работах Северо-Уральской экспедиции и общем характере мест и ландшафта были даны началь-

ником экспедиции Б. Н. Городковым[1], геологом А. Н. Алешковым[2] и ботаником В. Б. Сочава[3].

Отряд CHIROPTERA

Eptesicus nilssoni Keys. et Blas.

По зырянски — борда-шыр, по вогульски — товлын-мауй.

Летучие мыши в небольшом количестве селятся в Ляпинском крае. В районе р. Сыни видеть летучих мышей мне не приходилось. Один мертвый экземпляр этого вида я нашел в деревне Саран-Паул на реке Ляпине. Несколько живых летучих мышей я видел около вогульских юрт на реке Манье. По словам зырян, они живут около воды, скрываясь днем в избах, юртах, по дуплам. Летают весной и осенью, во время полярного летнего дня вылетают только в глухой хвойной тайге.

Отряд INSECTIVORA

Sorex araneus Linnaeus и **S. minutus** Linnaeus

Землероек много в Ляпинском крае. Они живут почти повсеместно, избегая лишь открытых каменистых мест. Чаще всего ловились землеройки по берегам водоемов, поросших кустарниками и редкими деревьями, по болотам, где прорывают ходы в моховом и торфяном слое. Землеройки живут оседло только во время вывода детей; в остальное время переходят с места на место, не придерживаясь определенного района. Пойманный мною в середине июля в верховьях реки Маньи выводок *S. araneus* состоял из 6 штук, причем молодые уже почти достигли роста матери.

Neomys fodiens Pallas

По зырянски — ва-шыр.

Водяная кутора очень обыкновенна по всем водоемам Полярного Урала, но в Ляпинском крае встречается значительно чаще, чем дальше к северу,

[1] Полярный Урал в верхнем течении реки Соби. Труды Ботанич. музея Акад. Наук СССР, вып. XIX. — Полярный Урал в верхнем течении рек Соби и Войкара. Изв. Ак. Наук СССР, 1926. — Полярный Урал в верховьях рек Войкара, Сыни и Ляпина. Сборник «Северный Урал». Материалы Ком. эксп. исследований Акад. Наук СССР, вып. 7.

[2] Ляпинский край. Сборник «Северный Урал». Материалы Комиссии эксп. исследований Акад. Наук СССР, вып. 7. — Дунито-перидотитовые массивы Полярного Урала. Там же, вып. 18, 1929 г.

[3] Ботанический очерк лесов Полярного Урала от реки Нельки до р. Хулги. Труды Ботан. музея Акад. Наук СССР, вып. XXI, 1927. — Северные границы кедра на Урале. Изв. Акад. Наук СССР, 1927.

на Сыне. Кутора живет в тех же условиях, что и водяная крыса, и часто поселяется в их норах. Собственные норы кутора роет без определенной схемы. Весь район, в котором поселяется зверек, бывает изрыт массой ходов, имеющих диаметр около 4 см. Выходные отверстия простые. Ход в некоторых местах немного расширен и образует подобие жилой камеры.

Водяная землеройка на Урале засыпает только в самые сильные морозы. Зыряне говорили мне, что очень часто видели ее на снегу. Ранней весной (в марте) мне самому приходилось видеть кутору во Владимирской губ., бегающей по снегу, когда еще не было ни одной проталины. Относительно времени рождения молодых точных сведений у меня нет. Выводок кутор, пойманный в верховьях реки Маньи, в середине июля, состоял из матери и семи молодых, уже почти нормального роста. Семья держалась вблизи друг от друга и еще не распалась. У самок, которых я ловил в конце июля, не было никаких признаков беременности, и новорожденных или просто малого роста кутор в конце лета я не встречал, из чего можно заключить, что на Урале помет бывает один раз в году — весной.

Talpa europaea Linnaeus

По зырянски — му-ош.

Крот довольно редок в Ляпинском крае, а в бассейне реки Сыни его совершенно не знают, так что приблизительно по водоразделу между этими реками проходит северная граница крота в Западной Сибири[1].

Он селится по открытым заливным берегам рек и речек, вблизи болот и озер в тайге, на травянистых открытых полянах. Два экземпляра крота были добыты нашей экспедицией в сентябре около деревни Саран-Паул, на берегу реки Ляпина.

Отряд FISSIPEDIA

Ursus arctos Linnaeus

По зырянски — ош, по вогульски — вортолнуд.

Наблюдения над этим зверем составляют предмет особой статьи.[2] Здесь замечу только, что медведь широко распространен по северному Уралу, заходя летом из тайги в полосу кустарников и даже в тундру.

[1] В этом районе повидимому проходит северная граница для целого ряда других млекопитающих, о чем будет сказано в соответствующих местах.

[2] См. К. К. Флеров. Очерк жизни бурого медведя на Северном Урале. Ежегодник Зоологического музея Акад. Наук, т. XXX, вып. 3, 1929, стр. 351.

Gulo gulo Linnaeus

По зырянски — сана, по вогульски — тулмах.

Россомаха один из самых распространенных промысловых зверей Северного Урала. Мне пришлось несколько раз видеть россомах на реке Сыне



Фиг. 2. След левой передней лапы медведя (*Ursus arctos*) на песке. Ляпинский Урал, верховья р. Маньи, 4 VIII 1927 г. Длина следа 17.5 см; ширина 15.5 см.

и Ляпине, как в таежной области, так и в районе горных тундр. В верховьи реки Маньи 23 июня была встречена самка с тремя молодыми, из которых два (♂ и ♀) добыты. Семья держалась в тайге близ реки, молодые уже часто уходили от матери, но не разбредались далеко. Ростом они были на $^1/_3$ меньше взрослого зверя. Вероятно это был ранний весенний помет.



Фиг. 3 След правой задней лапы медведя (*Ursus arctos*) на песке. Ляпинский Урал, верховья р. Маньи, 4 VIII 1927. Длина следа 25.5 см; ширина 16,5 см.

Meles meles Linnaeus *[1]

Барсук редок в Ляпинском крае. Он известен очень немногим охотникам. Изредка попадается по берегам рек.

Martes martes Linnaeus

По зырянски и вогульски — куниця,

и

Martes zibellina Linnaeus

По зырянски — низь, по вогульски — нёхыс.

Оба зверя в последнее время стали редки в посещенных экспедицией местах. Мне пришлось раза три видеть следы соболя, но самого зверя добыть не удалось. Зыряне и вогулы добывают этих зверей в небольшом числе.



Фиг. 4. Следы соболя (*Martes zibellina*) на песке, берег реки Большой Харуты в Малом Урале, бассейн р. Сыни, 17 VIII 1926.

Mustela nivalis Linnaeus и **Mustela erminea** Linnaeus

По зырянски — быжа, по вогульскп — чщиольчщи.

Местные жители не различают этих двух зверьков и считают ласок за молодых горностаев.

Оба зверька попадаются не часто везде. Несколько обыкновенней ласка около поселков. Горностай держится по береговым зарослям.

Mustela putorius Linnaeus* и **M. lutreola** Linnaeus*

По словам местных промышленников-зырян, норка иногда попадается на Ляпине. Одна норка была убита осенью 1926 г. около деревни Саран-Паул и продана в местную факторию Госторга. К сожалению, экземпляр не попал в руки зоологов. Хорек известен зырянам, но очень редок.

Lutra lutra Linnaeus

По зырянски — вурд, по вогульски — уонтыр.

На Ляпине редка, чаще по мелким притокам. Более обыкновенна в бассейне реки Сыни.

[1] Звездочкой отмечены звери, отсутствующие в моих сборах.

Canis lupus Linnaeus

По зырянски — зверь, по вогульски — уй, салэуй.

Волк многочисленен. Не живет на одном месте, бродит за оленьими стадами, которым наносит громадный вред. Летом держится в Урале, зимой спускается в тайгу. Мне приходилось видеть волков и в Сыньинском и Ляпинском районах.

Vulpes vulpes Linnaeus

По зырянски — руч, по вогульски — охсар.

Попадается не часто. Летом держится в зоне альпийских кустарников, главным образом среди зарослей *Alnus fruticosa*, охотясь за леммингами и тундровой куропаткой.

Alopex lagopus Linnaeus

По зырянски — кынь, по вогульски — лéпек.

Зимой обыкновенен в Урале, как в районе Сыни, так и в Ляпинском крае. В 1927 г. в большом числе забежал в Березовский район. Было добыто около 600 штук. В небольшом числе живет оседло.

Lynx lynx Linnaeus

По зырянски — рысь, по вогульски — рась.

Встречается только в Ляпинском бассейне, дальше на север не идет. На Сыне попадается лишь в виде исключения.

Отряд RODENTIA

Dicrostonyx torquatus Pallas[1] (см. табл. I и II)

В пределах Северного Урала серый или копытный лемминг, по моим наблюдениям, живет на всех открытых хребтах, по каменистым болотам с осокой, пушицей и карликовой березой, среди редких лиственничников верхней границы тайги, заходит в речные долины, но не спускается в глухую тайгу, являясь типичным представителем каменистой тундры. Наиболее характерной стацией ошейникового лемминга на Северном Урале нужно считать дунитовые россыпи по склонам и вершинам Большого Урала. Особенно охотно держится он по небольшим заболоченным западп-

[1] За два года работы на Полярном Урале мне не пришлось добыть настоящего лемминга (*Lemmus*), хотя последний здесь встречается, о чем свидетельствуют сборы Д. Вардроппера, хранящиеся в Зоологическом институте Акад. Наук.



Фиг. 5. Следы лисицы (*Vulpes vulpes*): а — след в натур. величину; б — следы лисицы, поймавшей глухаря (*Tetrao urogallus*); в — следы лисицы, перепрыгнувшей через камень. Левый берег р. Сухой Сыни (бассейн р. Сыни, Полярный Урал) против впадения Малой Харуты, 2 IX 1926 (следы на песке).

нам среди россыпей с небольшими озерками и ручьями, с редкой древесной растительностью (лиственница, береза, изредка ель) и густым покровом из низкорослой березы, трав и мхов.

Серый лемминг живет в одиночку или маленькими колониями. Не будучи привязанным к одному месту, он часто перекочевывает; более или менее оседло живут самки в период размножения. Норы, в которых выводятся молодые, не глубокие и, в сравнении с полевками, просто устроены. Лемминг роет их под камнями или под корнями деревьев и кустов. Для примера приведу описание двух наиболее типичных нор. 1) Нора в западине слабо заболоченной, среди каменной (дунитовой) россыпи, вблизи долины. Кругом много болот и маленьких озерков, редкие лиственницы, кусты берез, травяной покров. Норы под корнями лиственниц. Ход идет слабо наклонно вниз на 15—20 см и дальше делает поворот вбок. Норы простые, слабо разветвленные с 1—2 выходами. Выходное отверстие с раструбом. Ход в 4—4.5 см диаметром. Перед выходом площадка, прикрытая частью сводом расширенного хода, частью корнями и кустами. Площадка увеличивается кучкой выброшенной из норы земли. Наружных дорожек нет. Они намечены только возле ходов, среди *Betula nana*; на открытых местах их нет. 2) Нора на открытом каменистом, слегка заболоченном берегу реки, со слабым травяным покровом, с массой мелких углублений. Норка под большим камнем. Сводом служит камень, под которым находится жилое помещение в 25—30 см диаметром; оно выстлано мхом и травой. От него радиусами расходятся 4 выходных коридора, которые открываются по бокам камня. Таковы гнезда, устраиваемые самками для вывода молодых. Одиночные же лемминги вовсе не устраивают постоянных жилищ, а, перекочевывая, находят себе временное убежище в трещинах, под камнями, в ямах, среди корней деревьев, прорывая лишь самые простые, не длинные коридоры. Благодаря такому устройству нор и медленным, по сравнению с полевками, движениям лемминга очень легко поймать — стоит только поднять камень, под который он убежал. Возможно, что простое устройство нор вызвано каменистой почвой тех мест, где на Урале живет серый лемминг, так как дунитовые россыпи образуют плотную массу без всяких просветов, и зверек, прорыв тонкий слой рыхлой почвы, наталкивается на каменную преграду, которой не может преодолеть.

Пища серого лемминга целиком состоит из растений, преимущественно листьев и сережек *Betula nana* и семян злаков. Просмотр содержимого желудков, всегда очень сильно измельченного, не дал ни одного животного остатка.

Что касается размножения, то, повидимому, серый лемминг имеет два помета в год. Это можно заключить из факта нахождения в начале августа полувзрослых леммингов, тогда как в ловушки попадались беременные самки. Число эмбрионов у самки, пойманной 5 августа, было 9, нормально же 7. У молодой самки, пойманной 16 августа, было всего 3 эмбриона.

Как я уже сказал, движения копытного лемминга медленны и неуклюжи. Он передвигается мелкой рысью, но о мышиной быстроте и проворстве нет и помина. Завидя опасность, лемминг поднимается на возвышение, становится на задние лапки и осматривается. Убедившись, что опасность близка, зверек в перевалочку, широко расставив лапы, спасается в нору. Эти зверки удивительно напоминают сурков по всему складу и движениям. В них нет ничего мышиного. Это сурки-лилипуты арктических степей.

Evotomys rutilus Pallas и **E. rufocanus** Sundev.

Эти две полевки обитают хвойные леса, выбирая более сухие места. Часто селятся они в скалистых россыпях, наряду с пищухой. В таких местах они не роют нор, а живут в пустотах, образованных камнями. Иногда рыжие полевки живут на торфяных болотах, а изредка попадаются и около рек. Очень часто они поселяются в остяцких юртах, где ведут образ жизни домашних мышей, биологически замещая последних.

На Урале в течение года рыжие полевки повидимому несколько раз меняют свое местопребывание. По имеющимся у меня наблюдениям можно набросать следующую картину сезонных смен местопребывания рыжих полевок. Весь период таяния снегов они держатся в лесах, растущих в россыпях, по склонам. Россыпи покрыты тонким слоем почвы, поросли мхом и травами. Подлесок состоит из можжевельника и карликовой березы. Ели образуют отдельные группы, часто очень густые. Под ними нет никакой растительности и земля засыпана сухой хвоей. Под почвой, между камнями, остаются большие промежутки. Поэтому вся вода, стекающая с гор, идет глубоко внизу, а поверхность почвы остается сухой. В этом сухом слое и бывают вырыты норы, до глубины в 15—20 см. Главная масса нор роется под корнями описанных групп деревьев. Они не имеют определенного плана и часто бывают устроены просто между камнями, под поваленными стволами в естественных углублениях или просто под корнями. Наружных дорожек нет или они лишь слабо намечаются возле входов в нору. Главную пищу рыжих полевок в это время составляют шишки.

Осенью, с наступлением холодов, рыжие полевки перекочевывают в более редкие лиственные леса, на пологих склонах с толстыми слоями почвы, лежащей на плотных дунитовых массах. Зимой здесь лежат глубокие снега, и полевки находят прекрасную защиту от холодов, прорывая глубокие норы. Весной же и летом вода массами стекает с гор, идя по поверхности и сильно размывая ее. Этим объясняется малое количество мхов, растущих в таких открытых лиственничниках, и почва покрыта травами и редкими кустами *Betula nana*, которые служат полевкам пищей во время зимы.



Фиг. 6. Земляные валики, образовавшиеся от забивания землей снеговых ходов (b) и аналогичное образование из палочек *Betula nana*, служащих запасом пищи (a). Верховья р. Сухой Сыни (Полярный Урал, бассейн р. Сыни), 14 VII 1926.

Та же вода, заливая норы, заставляет рыжих полевок уходить в описанные выше леса на россыпях. Летом зимние норы видны повсюду, залитые и наполовину занесенные землей. Вся почва в таких местах покрыта ходами, прорытыми под самой поверхностью (на глубине 2—3 см). Земля, образующая свод такого коридора, поднята, вследствие чего весь ход резко выступает над поверхностью. Способ рытья такого хода совсем иной, нежели настоящего подземного. В этом случае полевка просто приподнимает землю, открывая узенький корридорчик. Рытье такого хода много быстрее и легче, чем настоящего, и этим объясняется, что ходы всех полевок, идущие на большое расстояние, именно такого типа. Многие ходы зимой прорываются на половину в снегу, а летом они сохраняются в виде борозд, открытых сверху, глубиною до 3 см. Часты ходы, целиком прорытые в снегу, и лишь полом для них служит почва. От таких ходов остается след в виде наружных дорожек. Отдельные ходы проходят сквозь снег на поверхность. При

рытье нор зимой земля выбрасывается полевками в снеговые ходы, забивая их. Такие забитые ходы летом оставляют длинные извитые земляные валики (фиг. 6, б), во множестве разбросанные по поверхности. Отдельные ходы ведут в глубь, к небольшим выстланным травою камерам, очевидно служащим убежищем в сильные морозы. Зимней пищей, кроме травы и сережек *Betula nana*, служат также шишки лиственниц и кора карликовой березки. Рыжие полевки натаскивают в свои ходы массы мелких палочек *Betula nana* (5—6 см длины) и иногда забивают ими, как землей, снеговые ходы. Таким образом, после таяния снегов эти зимние запасы остаются на поверхности, образуя валики, подобные земляным (фиг. 6, а).

Наземных гнезд у *Evotomys* на Урале мне видеть не пришлось. Возможно, что таковые и бывают, но во всяком случае реже, чем у других полевок. Молодые рождаются два раза в лето. Первый помет бывает в начале мая, второй в начале августа. Количество молодых сильно изменяется (от 3 до 10 штук). Нормально бывает штук 7. Иногда бывает еще третий помет среди лета.

Microtus oeconomus Pallas и **M. agrestis** Linnaeus

Бурые полевки — типичные обитатели прибрежных зарослей и больших болот с открытыми плесами. Хотя эти полевки и не живут в воде, и норы их не имеют подводных выходов, тем не менее на Северном Урале они роют их в тех же местах, где и водяная крыса. Стационарно разница между этими зверками выражается только в том, что водяная крыса занимает самый водоем и полосу, непосредственно к нему примыкающую, тогда как бурые полевки занимают береговую полосу и идут дальше от берега, в глубь суши. Их стацию можно характеризовать так: береговая полоса, где сказывается влияние водоемов (дренажи). Несомненно, эти полевки тесно связаны с кустарниками. На открытых торфяниках с редкими лиственницами и елями, где нет открытых водяных пространств, бурые полевки не встречаются.

Каждая нора занимает определенный район, имеющий не менее 2—3 метров в диаметре. Нормально нора вырывается под кочкой, под корнями кустов, вообще под каким-нибудь возвышением. Все норы имеют много выходов и разветвлений. Отдельные выходные отверстия соединены между собой ходами, которые в большинстве случаев имеют вид дорожек. Трава и верхний слой мха на дорожках бывают подгрызены и убраны, а сама дорожка плотно утоптана. Наружные дорожки часто принимают вид полуприкрытых

ходов. Полевки проводят их под сухой травой, под выступающими корнями и т. д.

Нора устроена таким образом: на ровном пространстве отверстие ведет в ход, который под небольшим наклоном, или почти вертикально уходит вниз, на глубину около 10 см. В местах, имеющих моховой покров, этот ход обыкновенно идет через весь слой мха до торфа и потом ведет в горизонтальном направлении по границе этих слоев.



Фиг. 7. Кочка *Carex viluica* с норами *Microtus oeconomus*. Внизу горизонтальный разрез кочки (схема). Р. Сухая Сыня, в 6 километрах от Малого Урала, бассейн р. Сыни, 5 VII 1926.

Отверстие, прорытое в углублении, ведет в горизонтальный или лишь слабо уходящий вниз коридор. Все сказанное можно отнести и к заливным местам, не имеющим мохового покрова. Отверстие норы, вырытой в илу, также ведет в ход, идущий вниз, но на несколько меньшую глубину (5—6 см). По характеру выходного отверстия почти всегда можно сказать, в каком направлении производилось рытье норы: отверстия, откуда начато рытье, имеют выброшенную землю, выходные же представляются в виде небольшого правильного отверстия, без земляного холмика. Норы, вырытые под кочками, образованными осоками, в заливных местах служат полевкам убежищем во время разлива, но обыкновенно полевки во время разлива перекочевывают в более высокие места. Со спадом воды они вновь возвращаются к старым норам. Эти норы, залитые водой, видны после разлива в виде занесенных илом ходов. Старые норы бросаются и вырываются новые. Норы, устроенные в кочках (фиг. 7), имеют обычное строение для такого типа нор. Целый ряд отверстий ведет в коридоры, которые звездообразно прорезывают всю кочку, иногда в несколько этажей, что вероятно является следствием постепенного подъема воды. Вокруг кочки, под нависшей сухой осокой, идет дорожка, наполовину скрытая травой, и от этой дорожки расходятся другие, боковые, которые соединяют кочковую нору с подземными. Кочки эти состоят из корней осоки, которые в нижней части

образуют так называемый осоковый торф. Вся кочка переплетена корнями большого куста осоки и не размывается водой. Расширенных жилых камер бурые полевки не вырывают, и коридоры имеют больший диаметр только в местах схождения нескольких ходов. Выходное отверстие несколько уплощенное, ширина его 4 см, высота 3 см. Ход несколько шире — ширина около 5 см, высота 4 см. Бурые полевки не живут в каком-либо определенном месте своей норы. Они перекочевывают по всему ее пространству. Внутри ходов постоянно можно находить остатки трав и листьев — ве-



Фиг. 8. Гнездо *Microtus oeconomus*. Река Сухая Сыня, в 6 километрах от Малого Урала, бассейн р. Сыни, 5 VII 1926.

роятно остатки пищи. На дорожках, соединяющих отверстия, или перед самими отверстиями, часто лежат кучи помета. Реже помет попадается внутри норы.

Наземные гнезда представляют собой нормальное явление. Вот общий характер гнезда. Построено из сухой осоки, березовых листьев, мха (*Hylocomium proliferum*) и, в небольшом количестве, — еловых и березовых палочек до 10 см (фиг. 8) длины. Гнездо в форме уплощенного шара, в 20 см диаметром и около 10—12 см высоты. Небольшое, почти скрытое, входное отверстие (3 см диаметром), находящееся против дорожки, ведет во внутреннюю камеру. Камера аккуратно выстлана осокой и листьями, причем листья осоки правильными кругами свиты по стенкам. В наружной части гнезда материал расположен беспорядочно — палочки, листья, мох и осока — все переплетено между собой во всех направлениях. Такие гнезда помещаются на сухих, не заливаемых местах, среди сухой травы или мха, под кустами, в прибрежных зарослях. От гнезда идет несколько дорожек, которые соединяют его с подземными норами.

Молодые у обоих видов полевок родятся два или даже три раза в год. Весенний помет родится в мае в земляных норах, осенний в середине августа, большей частью в наземных травяных гнездах. Число молодых очень изменчиво. Мне пришлось наблюдать у добытых полевок минимум 3 эмбрионов и максимум 12. Нормально бывает 6—9.

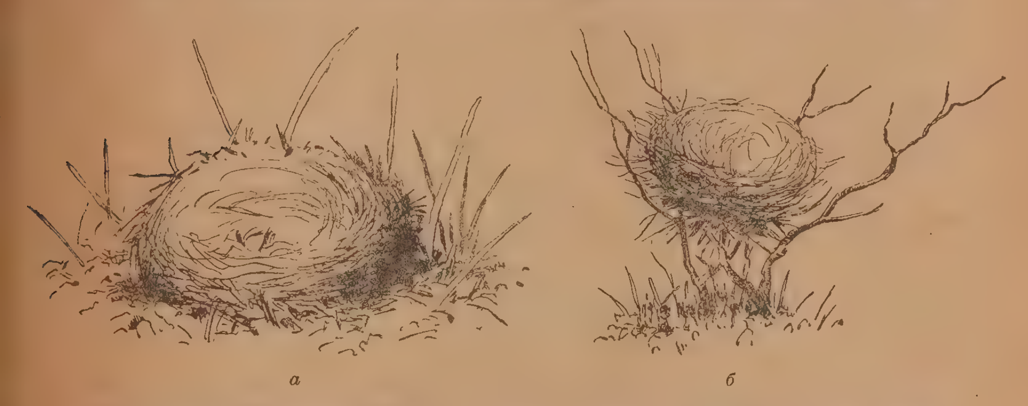
Пища исключительно растительная. Листья и сережки *Betula nana* видимо играют главную роль. На втором месте можно поставить осоки.

Microtus middendorffi Poljakov

Если описанные виды полевок характерны для тайги, то *Microtus middendorffi* является обитателем открытых осоково-сфагновых, кочковатых болот верхней границы леса, долин и тундр Большого Урала. Во время экспедиции 1926 г. в верховьях реки Сыни я находил этих полевок в большом числе по долине между Большим и Малым Уралом. В Ляпинском бассейне, где предгорья покрыты лесами, эта полевка попадалась лишь в небольшом числе на водоразделе и на вершинах Большого Урала. Каменистых мест миддендорфова полевка избегает. В болоте норы роются в кочках. Выходные отверстия, скрытые сухой осокой, соединены ходами, идущими в траве и прикрытыми сверху. Часто эти ходы переходят в открытые дорожки. Ходы и дорожки идут между кочками и постоянно бывают залиты водой. В кочке находится только собственно нора, в которой устроено выстланное осокой шарообразное гнездо. Ходы же почти целиком наружные. Ход идет от самой воды наклонно вверх или же снаружи, на вершину кочки, и уже там отверстие соединяет его с гнездом.

В более сухих местах миддендорфова полевка роет настоящие подземные норы. Ход идет под поверхностью почвы на глубине 3—4 см. Много наружных коридоров с поднятыми над поверхностью сводами. Выходные отверстия соединены дорожками. Диаметр хода около 5 см. Выходы двух типов. Первый — коридор под острым углом подходит к поверхности и заканчивается отверстием, имеющим диаметр хода. Во втором случае отверстие ведет на поверхность из середины хода; оно имеет диаметр в 3—3.5 см, и сейчас же за ним коридор конусообразно расширяется. Устройство самой норы довольно сложно, но более или менее правильно. Разветвлений от главного хода мало. Часты тупики. У полевки Миддендорфа очень часты наземные травяные гнезда, они строятся на вершинах кочек, имеют уплощенно шарообразную форму и бывают сплетены из осоки (фиг. 9, а).

Диаметр такого гнезда до 20 см, высота около 10. Очень часто эти гнезда не лежат непосредственно на земле, а бывают вплетены на кустиках голубики или карликовой березы на высоте 4—5 см. Само гнездо сплетается из тонких листьев осоки или пушицы, а снизу и с боков оплетено более грубыми и толстыми. Внутри гнезда камера в 6—7 см диаметром, выстланная пухом или шерстью. Внутри стенки гнезда очень плотны; шерсть переплетена травинками и сваляна на подобие войлока. Такое гнездо служит для летнего вывода детей. Но иногда наземное гнездо строит и одиночная полевка, в этом случае гнездо всегда меньше по размерам (10—12 см) и небрежно сделано. Иногда гнездо бывает сделано на высоте до 10—15 см



Фиг. 9. Гнезда *Microtus middendorffi*: а — наземное гнездо; б — гнездо на кустике *Betula nana*. Верховья р. Сухой-Сыни (Полярный Урал, в бассейне р. Сыни), 30 VII 1926.

от земли (фиг. 9, б). Возможно что такие гнезда служат убежищем во время высокой воды, когда наземные залиты. Во всяком случае, попадаются они сравнительно редко. Форма гнезда, свитаго из осоки, такова: верх — свод плоский, книзу гнездо конусообразно суживается. Низ и бока завиты, как у всех гнезд, более грубой осокой.

Помет, как в норах, так и в гнездах, мне приходилось видеть лишь в виде исключения. Обыкновенно он лежит большими кучами вблизи гнезда или на площадке, куда ведет несколько ходов, образуя специальное «отхожее место» или, как их называют американцы, «midden heap» (это относится не только к данному виду, но и ко всем другим полевкам).

Microtus (Stenocranius) major Ognev

Один экземпляр этой полевки добыт мною на р. Сыне возле села Мужи, весной 1926 г.

Arvicola amphibius Linnaeus

По зырянски — вурдысь, по вогульски — хунтыль.

Я приведу здесь наблюдения над водяной крысой в том порядке, как они стоят в моих дневниках, т. е. начиная с Западной Сибири и перейдя дальше к самому Уралу.

Весной, на Оби, водяные крысы, уходя от разлива, массами населяют острова. Норы покрывают весь берег, не залитый водой. Часто ходы бывают прорыты в еще не стаявшем снегу. Так как разлив длится очень долго, крысы устраивают норы близко к поверхности земли или на возвышенных местах. Каждая крыса имеет нору, не сообщающуюся с норами других крыс, и строго держится своего района, прогоняя пришельцев. Мне много раз приходилось видеть, как крысы отважно бросались даже на двух врагов сразу. Живут крысы большими колониями. Трудно сказать, чем они руководятся при выборе места для поселения. Видимо они отыскивают места с наиболее мягким берегом, где много ивы, кора которой служит им единственной пищей вплоть до начала лета. На островах приходилось часто находить хатки из прутьев (гнездо типа *Ondatra*). Иногда эти хатки устроены несколько отлично от таковых мускусной крысы — в большой куче ветвей, полусгнивших и заваленных листвой, крысы прорывают ходы. Приходилось наблюдать также гнезда водяных крыс, устроенные в дуплах или в лежащих на земле пустых стволах. Крысы совершенно не боятся человека и спокойно плавают рядом с остяками, ловящими рыбу. Особенно много крыс появляется в тихие вечера. Тогда их можно наблюдать десятками. Они бегают, постоянно затевают драки. Везде слышен писк, всплески воды, шуршание ног по снегу. Это объясняется тем, что на Обских островах сильными врагами водяных крыс являются только скопа и щука, а человек начал добывать водяных крыс для меха лишь в самые последние годы. По долинам притоков Оби водяная крыса поднимается далеко в горы. На р. Манье я находил водяных крыс на верхней границе леса, где они держатся по заболоченным долинкам с текущей и медленно текущей водой, густо заросшими травой берегами, большим количеством тальников, березы, *Alnus fruticosa* и лиственницы. В некоторых местах крысы населяют болота альпийской зоны.

В лесной полосе Урала водяные крысы населяют все долины рек, мелких притоков, болота и озера. Особенно любят стоячую и медленно текущую воду, значительно реже попадаются на берегах протоков с быстрым течением. В горном районе часто селятся среди камней. Наиболее характер-

ной стацией можно считать долины, заросшие густыми кустарниками, с массой протоков, прудков, кочковатых болот с обильным травяным покровом (злаки, осоки, зонтичные). Норы — под нависшими берегами, под корнями, среди травы кочек, камней. Норы имеют одну или несколько жилых камер и камер для запасов. Часть ходов от жилых камер идет к воде, многие открываются под водой. Другая часть идет на поверхность и открывается в траве, под кочками и пр. Нора помещается всегда у воды возле протоков, преимущественно с крутыми берегами, в которых открываются под-



Фиг. 10. «Midden heap» водяной крысы (*Arvicola amphibius*). Левый берег р. Сухой Сыни против впадения р. Малой Харуты (Полярный Урал в бассейне р. Сыни), 2 IX 1926.

водные и надводные ходы. Ходы занимают весь район, где живет водяная крыса. Эти районы обычно представляют собой отдельный островок, ограниченный овражком участок и т. п. На каждом из таких участков живет по две-три крысы. Молодые тоже держатся тут, пока не подрастут, но они остаются на участках дольше, нежели взрослые, которые уходят с началом спада воды. Летом, с постепенным высыханием долин, взрослые крысы отступают в более сырые места, переходя на берега остающихся водоемов. Молодые первого (весеннего) помета до этого времени (приблизительно до середины июля) держались в более широких местах, т. е. там, где были их родные гнезда и весной была вода. С указанного времени они начинают перекочевывать ниже к сырым местам и маленьким лужам и протокам, откуда уже ушли взрослые. Своих нор молодые не вырывают, а населяют брошенные ходы взрослых.

Нормально на Урале у водяных крыс бывает два помета — весенний в мае, родится в большинстве случаев в наземных гнездах, так как с высокой водой в норах бывает очень сыро, и второй, летний, в конце июля и начале августа, родится в земляных норах.

Молодые первого, майского, помета на четвертом месяце (в середине августа) перелинивают и идут в зиму уже в полном взрослом меху. Линька начинается с головы и передвигается кзади. Последней перелинивает задняя часть спины у хвоста. Нормально число молодых около 6 штук.

Пища водяных крыс на Урале преимущественно растительная, главным образом они поедают зонтичные, съедают листья, молодые стебли и побеги, которых всегда очень много натаскивают к норам и заваливают ими как сами норы, так и дорожки, идущие по всем направлениям. Зимние запасы начинают заготовлять с конца июля или начала августа. Состав их — преимущественно корневища осоки и зонтичных.

Среди попадавшихся мне на Северном Урале водяных крыс очень велик процент частичного альбинизма (причем наблюдается какая-то определенная закономерность в расположении пятен: если есть пятно между лопаток — обязательно есть маленькое пятно на груди). Меланизм сравнительно редок.

Не лишним считаю отметить, что самцы и самки водяных крыс довольно хорошо могут быть различаемы по хвосту — у самки хвост тонкий и длинный, толщиной при основании 4 мм, у самца толстый и относительно короче, толщина при основании 6 мм.

Rattus norvegicus Berkenhout

Пасюк обыкновенен во всех населенных местах по Оби, а также изредка попадается по большим зырянским деревням на Сосве и Ляпине.

Mus musculus Linnaeus

По зырянски — шыр, по вогульски — мàуй, матà-прысь.

К домашней мыши относится все сказанное о пасюке.

Castor fiber Linnaeus *

По зырянски — мой, по вогульски — витуй.

Бобр не встречается ни на самом Уральском хребте, ни по рекам, стекающим с гор. В настоящее время в Западной Сибири бобр обитает

исключительно по верхнему бассейну Малой Сосвы (приток Северной Сосвы) и по бассейнам северных притоков реки Конды. Мне приходилось видеть у остяков на Сосве погрызенные бобрами стволы. По словам остяков, бобр живет в земляных норах, реже устраивает хатки.

Eutamias asiaticus Gmelin

По зырянски — орда, по вогульски — кочьшар.

Обыкновенен в бассейне Сосвы и Ляпина, где населяет как равнинную тайгу, так и леса на самом Урале. По бассейну Сыни значительно реже.

Pteromys volans Linnaeus

В небольшом количестве встречается по Ляпинскому бассейну и в виде исключения доходит до Сыни. Обыкновенна на р. Сосве.

Sciurus vulgaris Linnaeus

По зырянски — ур, по вогульски — лейн.

Белка чрезвычайно сильно уменьшилась в числе за последние годы. Промышленники добывают от 100 до 200 экземпляров за зиму, тогда как всего несколько лет назад били до 1000 штук. В Урале доходит до верхней границы леса.

Lepus timidus Linnaeus

По зырянски — кыч.

Встречается везде в небольшом количестве. На Урале реже, чем в тайге.

Ochotona hyperborea Pallas

Найдена на всем пространстве хребта, исследованном северо-уральской экспедицией. По сведениям, полученным мною от разных лиц, какая-то пищуха живет в россыпях по южной части Северного Урала. Кроме того, указания Палласа и Семашко, что пищуха встречается на Урале к северу до 55° с. ш., не может относиться к другому виду, так как *Ochotona pusilla* — степной зверь. Повидимому *O. hyperborea* спускается по Уральскому хребту далеко на юг.

Все полученные о пищухе сведения напечатаны мною в «Ежегоднике Зоологического музея Акад. Наук» (т. XXVIII, стр. 138, 1927). По неко-

торым признакам экземпляры, добытые на Полярном Урале, отличны от восточно-сибирских и выделены мною в самостоятельный подвид *O. hyperborea uralensis* Flerow.

Отряд ARTIODACTYLA

Alces alces Linnaeus

По зырянски — лола, по вогульски — яныуй.

Лось редок как по Сыне, так и по Ляпину. Чаще встречается по верховьям Сосвы.

Rangifer tarandus Linnaeus



Фиг. 11. След дикого северного оленя (*Rangifer tarandus*). Левый берег р. Большой Сыни близ юрт Тильтим-горт, 15 IX 1926 (след быка на илу).

По зырянски — кыр, по вогульски — саль

Дикий северный олень в районе верховьев Ляпина и Маньи держится стадами в 3—5 голов, реже до 10—15. Вообще он редок в этих местах. Значительно больше оленей в бассейне верхней Сосвы. Там олень обыкновенно образует стада от 10 до 15 голов, но нередки стада до 50 голов. Летом олени пасутся по западному склону Урала и спускаются далеко в Печорский край. Зимой стада откочевывают на восток в Западную Сибирь и спускаются с Урала в тайгу.



Фиг. 12. Пихтовый сланец. Верхний предел тайги. Верховья р. Нярца-ю, бассейн Маньи, Ляпинский Урал, 7 IX 1927.

CONSTANTIN C. FLEROW. ZUR BIOLOGIE DER SÄUGETIERE DES NÖRDLICHEN URALS UND WESTSIBIRIENS

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegender Aufsatz gibt die biologischen Beobachtungen an Säugetieren vom arktischen Ural und Westsibirien wieder, welche vom Verfasser während der expedition der Akademie der Wissenschaften in den nördlichen Ural im Stromgebiet der Synja (1926) und des Ljapin (1927) gemacht wurden.

Eptesicus nilssoni Keys. et Blas.

Fliegt während des polaren Sommertages nur an abgelegenen Stellen in der Taiga.

Talpa europaea Linnaeus

Der Maulwurf kommt nur im Gebiet des Ljapin vor. Die Nordgrenze seiner Verbreitung in Westsibirien verläuft längs der Wasserscheide zwischen den Flüssen Synja und Ljapin.

Ursus arctos Linnaeus

Über den Bär hat der Verfasser in dem Ann. Mus. Zool. Acad. Sci. URSS, XXX, No 3, 1929 einen Aufsatz veröffentlicht. Der Bär ist im nördlichen Ural weit verbreitet. Verfasser fand Bäume, welche vom Bär «gemerkt» waren, wie das für die amerikanischen Bärenarten angegeben wird.

Mustela lutreola Linnaeus

Ein Exemplar wurde 1926 am Fluss Ljapin getötet, was von einem Übergang der Tiere über der Ural nach Westsibirien zeugt.

Lynx lynx Linnaeus

Die Nordgrenze der Verbreitung des Luchses in Westsibirien wird vom Fluss Synja gebildet.

Dicrostonyx torquatus Pallas

Lebt in der Tundra, in seltenen Fällen in die Taiga übergehend. Einen charakteristischen Biotop dieses Tierchens bilden kleine versumpfte Gebiete mit zerstreutem Baumwuchs. Lebt einzeln oder in kleinen Kolonien; migriert. Während der Fortpflanzungszeit sind die Weibchen an einen bestimmten Standort gebunden. Der Bau ist einfach eingerichtet, mit 1—4 Ausgängen von 4—4.5 cm im Durchmesser. Die Wohnkammer hat 25—30 cm im Durchmesser. Einsame Lemminge richten sich keinen Bau ein, sondern wandern und leben in gelegentlichen Schlupfwinkeln. Die Nahrung ist ausschliesslich eine pflanzliche. Junge werden zwei mal im Jahr geworfen: im Frühjar und am Ende des Sommers; ihre Zahl ist 6—9. Die Bewegungen des grauen Lemmings sind langsam und ungelenk, der Verfasser bezeichnet ihn als «Zwergmurmeltier der arktischen Steppen».

Evotomys rutilus Pallas und *Ev. rufocanus* Sundev.

Leben im Nadelwald, seltener an Gesteinhalden und Torfmooren. Siedeln sich oft in menschlichen Behausungen an, wo sie die hier fehlende Hausmaus vertreten. Verfasser konstatiert, dass *Evotomys* offenbar mehrmals im Jahr ihren Wohnort wechseln. Wenn der Schnee taut, leben sie im Walde in Gesteinhalden. Die Steine sind hier mit einer dünnen Erdschicht bedeckt, welche trocken bleibt, da alles von den Bergen herabströmende Wasser tief unten zwischen den Steinen fliesst. Der Bau wird unter Baumwurzeln in der oberflächlichen Bodenschicht gegraben. Oft hält sich *Evotomys* unter gestürzten Baumstämmen oder natürlichen Vertiefungen auf. Zu dieser Zeit nährt das Tier sich vorwiegend von Coniferenzapfen. Im Herbst werden Berghänge mit lichten Lärchenwaldungen aufgesucht, wo das Tier unter der dicken Schneedecke, wo es tiefe Höhlen gräbt, Schutz vor den Winterfrösten findet. Im Frühjahr rieselt hier viel Wasser (weshalb hier auch kein Moos wächst), welches die Höhlen zerstört, weshalb die Feldmäuse gezwungen werden, die obenerwähnten Gesteinhalden in den Wäldern aufzusuchen. Im Winter werden viele Gänge halb im Schnee gegraben und sind im Sommer in Gestalt von Furchen zu sehen. Eine Menge weit verlaufender Gänge wird unmittelbar unter der Erdoberfläche (in einer Tiefe von 2—3 cm) gegraben. Die Decke eines solchen Ganges ist über der Bodenfläche stark vorgewölbt, da das Erdreich beim Graben gehohen wird. Ein Teil der Gänge wird im Schnee an der Erdoberfläche gegraben und im Sommer sind an ihrer Stelle gleichsam Wegpfade zu sehen. Wenn im Winter unterirdische Gänge gegraben werden, so wird das Erdreich aus ihnen in die Schneegänge fortgescharrt und verstopft die letzteren. Solche verstopfte Gänge sind im Sommer als Erdwälle an der Oberfläche zu sehen. Im Winter besteht die Nahrung aus Gras, Rinde und Kätzchen von *Betula nana*. Junge werden im Mai und Anfang August geworfen, zuweilen ein drittes Mal mitten im Sommer; ihre Zahl beträgt gegen 7.

Microtus oeconomus Pallas und *M. agrestis* Linnaeus

Leben am Ufer von Gewässern im Wald oder Gebüsch. Die trockeneren offenen Strecken und Wälder sind von *Microtus* besiedelt, und die Gewässer selbst von der Wasserratte, was die Verteilung der Feldmäuse nach Biotopen im nördlichen Ural klar charakterisiert. Der Bau ist ziemlich kompliziert und wird gewöhnlich unter irgendeiner Erhöhung gegraben; die einzelnen Ausgänge sind durch oberflächliche Pfade verbunden. Beim Austreten der Flüsse verlassen die Feldmäuse solche Baue und graben sich neue in kleinen Erdhügeln; manchmal sind die Baue mehrstöckig, je nach dem Steigen des Wassers. In moosbedecktem Boden wird der Bau durch die ganze Moosdecke bis zum Torf gegraben und verläuft dann an der Grenze dieser Schichten; die Gänge haben circa 5 cm im Durchmesser. Auf den Pfaden oder neben den Ausgangslöchern finden sich Häufchen von Excrementen, seltener im Bau selbst. Oberirdische Nester aus Gras, Moos, Blättern und Zweigen sind eine gewöhnliche Erscheinung; die Nester haben etwa 20 cm im Durchmesser. Junge werden 2 oder sogar 3 mal im Jahr geworfen;

der Flühjahrswurf findet im Mai in Erdhöhlen, der Herbstwurf Mitte August meist in oberirdischen Nestern statt. Die Zahl der Jungen ist sehr veränderlich: sie schwankt zwischen 3 und 12 und beträgt normalerweise 6—9. Die Nahrung ist ausschliesslich eine pflanzliche.

Microtus middendorffi Poljakov

Ein Bewohner offener höckeriger Sphagnumsümpfe mit Riedgras an der oberen Waldgrenze, sowie der Täler und Tundra. Die Baue befinden sich in Erdhügeln, die Gänge verlaufen oft im Wasser. Der Erdhügel enthält nur das aus Gras bestehende Nest, fast alle Gänge sind oberirdisch. An trockeneren Stellen werden echte unterirdische Höhlen gegraben; der Durchmesser der Gänge beträgt 5 cm. Oft findet man oberirdische Nester aus Gras, die auf Erdhügeln, zuweilen auf strauchartigen *Betula nana* gebaut werden. Der Kot wird gewöhnlich in einiger Entfernung vom Nest oder Bau abgelegt und bildet ein Häufchen, oder liegt auf einem Erdhügel, zu welchem ein Gang führt, — sog. Aborte, «midden heap», welche für alle Feldmausarten charakteristisch sind.

Microtus (*Stenocranius*) *major* Ognev

Ein Exemplar am Fluss Synja unweit des Dorfes Muzhi im Frühjahr 1926 erbeutet.

Arvicola amphibius Linnaeus

Im Frühjahr versammeln sich die Wasserratten während des Austretens des Obj-Flusses in Massen auf den Inseln. Der Bau ist nicht tief; jede Wasserrate lebt in ihrem eigenen Bau und vertreibt jeden Ankömmling. Oft werden Hütten (vom Typus der Ondatra) angelegt. Das Nest wird in hohlen Bäumen und liegenden Baumstämmen eingerichtet, oft werden Höhlen im nicht abgetauten Schnee gegraben. Die Nahrung besteht im Frühjahr hauptsächlich aus Weidenrinde. Die Tiere sind an stillen wärmen Abenden am meisten tätig. Längs den Tälern der Nebenflüsse der Obj dringen sie ins Gebirge bis zur alpinen Zone vor. In der Waldzone des Ural sind sie an kleinen langsam fliessenden Flüssen, an Sümpfen und Seen mit verwachsenen Ufern zahlreich. Der Bau befindet sich unter der Uferböschung zwischen Wurzelwerk, unter Erdhügeln, zwischen Steinen; er hat eine oder zwei Wohnkammern und eine Vorratskammer. Die Gänge verlaufen an der Erdoberfläche zum Wasser, manche unter Wasser. Die erwachsenen Ratten ziehen sich mit dem Abfallen des Wassers allmählich an feuchtere Stellen zurück, während die Jungen des Frühjahrswurfs sich etwa bis zur Mitte des Juli an höheren Stellen aufhalten, und danach tiefer an die von den erwachsenen Tieren verlassenen Orte hinabsteigen und von deren Höhlen Besitz ergreifen. Junge werden 2 mal im Jahre geworfen: im Mai in oberirdischen Nestern und Ende Juli oder im August in Erdhöhlen. Die Jungen des Frühjahrswurfs mausern im August und erhalten das Haarkleid der Erwachsenen. Die Mauser verläuft am Körper vom Kopfende zum Schwanz. Die Zahl der Jungen beträgt ungefähr 6. Die Nahrung ist hauptsächlich pflanzlich (Umbelliferen). Wintervorräte werden

von Ende Juli ab angelegt und bestehen vorwiegend aus unterirdischen Riedgrasstengeln und Umbelliferen. Es ist bemerkenswert, dass ♂ und ♀ der Wasserratte am Schwanz gut zu unterscheiden sind. Der Schwanz des ♀ ist dünn und lang, seine Dicke beträgt am Grunde 4 mm, der Schwanz des ♂ ist dicker und relativ kürzer, am Grunde 5.5—6 mm dick.

Rattus norvegicus Berkenhout und *Mus musculus* Linnaeus

An der Obj gemein; kommen in grösseren Dörfern der Ostjaken an der Sosjva und dem Ljapin-Fluss vor.

Castor fiber Linnaeus

Im oberen Stromgebiet der kleinen Sosjva und an den nördlichen Nebenflüssen der Konda. Lebt paarweise in Erdhöhlen, seltener in Hütten.

Eutamias asiaticus Gmelin

Gemein an der Sosjva und dem Ljapin und steigt bis zu den Gebirgswäldern hinauf; an der Synja selten.

Pteromys volans Linnaeus

Gemein an der Sosjva, kommt ausnahmsweise auch an der Synja vor.

Sciurus vulgaris Linnaeus

Im ganzen Waldgebiet verbreitet, aber während der letzten Jahre in der Zahl stark zurückgegangen.

Lepus timidus Linnaeus

Überall in geringer Zahl; im Ural seltener als in der Taiga des Flachlandes.

Ochotona hyperborea Pallas

Im gesamten von der Expedition durhforschten Teil des Ural festgestellt, offenbar den ganzen Ural nördlich des 50 oder 55° n. Br. bevölkernd. Alle Mitteilungen über dieses Tier sind vom Verfasser im Aufsatz: Sur l'Ochotona, provenant de l'Oural du Nord (*Ochotona hyperborea uralensis* Flerow). Ann. Mus. Zool. Acad. Sci. URSS, XXVIII, 1927, S. 138) veröffentlicht.

Alces alces Linnaeus

Selten an der Synja und am Ljapin, häufiger längs der Sosjva anzutreffen.

Rangifer tarandus Linnaeus

An der Manja und am Ljapin selten, hält sich in Herden von 3—5 Kopf, seltener 10—15 Kopf. Bedeutend mehr Rentiere gibt es an der Sosjva, hier kommen Herden bis zu 50 Kopf vor. Hält sich im Sommer am westlichen Abhang des Ural auf und dringt weit ins Petshoragebiet vor, im Winter wandern die Tiere ostwärts nach Westsibirien.





Dicrostonyx torquatus Pallas. Верховья р. Б. Харуты, 16 VIII 1926.





Dicrostonyx torquatus Pallas. Верховья р. Б. Харуты, 16 VIII 1926.

Оглавление — Sommaire

стр.			PAG.
*Н. И. Ахиезер. О некоторых функциях, наименее отклоняющихся от нуля в двух данных промежутках. Часть вторая (с 2 фиг.)	309	N. Achyeser. Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. II Teil (mit 2 Fig.)	309
*В. С. Игнатовский. Об интеграле с функциями Бесселя (с резюме на русск. яз.)	345	V. Ignatovskij (W. v. Ignatowsky). Über ein Integral mit Besselschen Funktionen (mit einem russischen Zusammenfassung)	345
*А. Н. Колмогоров. О предельных теоремах теории вероятностей (с резюме на русск. яз.)	363	A. Kolmogorov (A. Kolmogoroff). Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit einem russischen Zusammenfassung)	363
А. К. Рухадзе и И. Н. Векуа. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем	373	*A. Ruchadze et I. Vekua. Sur la torsion d'un cylindre armé d'une tige	373
*К. Шлюмберже. Сообщение об явлениях электрофильтрации в скважинах, пересекающих пористые пласты (с 1 фиг., переводом на русск. яз. и примечанием акад. И. М. Губкина)	387	C. Schlumberger. Note sur les phénomènes d'électro-filtration à l'intérieur des sondages traversant des couches poreuses (avec 1 fig., une traduction en russe et une note supplémentaire de I. Gubkin, membre de l'Académie)	387
В. И. Вернадский. По поводу критических замечаний акад. А. М. Деборина	395	*V. Vernadskij (W. Vernadsky). A propos de la critique de A. Deborin, membre de l'Académie	395
А. М. Деборин. Критические замечания на критические замечания акад. В. И. Вернадского	409	*A. Deborin. Remarques sur la critique de V. Vernadskij, membre de l'Académie	409
Л. Л. Иванов. К минералогии топазовых месторождений Волыни (с 3 фиг.)	421	*L. Ivanov. Sur la minéralogie des gisements de topaze en Volhynie (Ukraine) (avec 3 fig.)	421
К. К. Флеров. Очерки по млекопитающим Полярного Урала и Западной Сибири (с 12 фиг., 2 табл. и резюме на нем. яз.)	445	*C. Flerov. Sur la biologie des mammifères de l'Oural du Nord et de la Sibérie Occidentale (avec 12 fig., 2 pl. et resumé en allemand)	445

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.